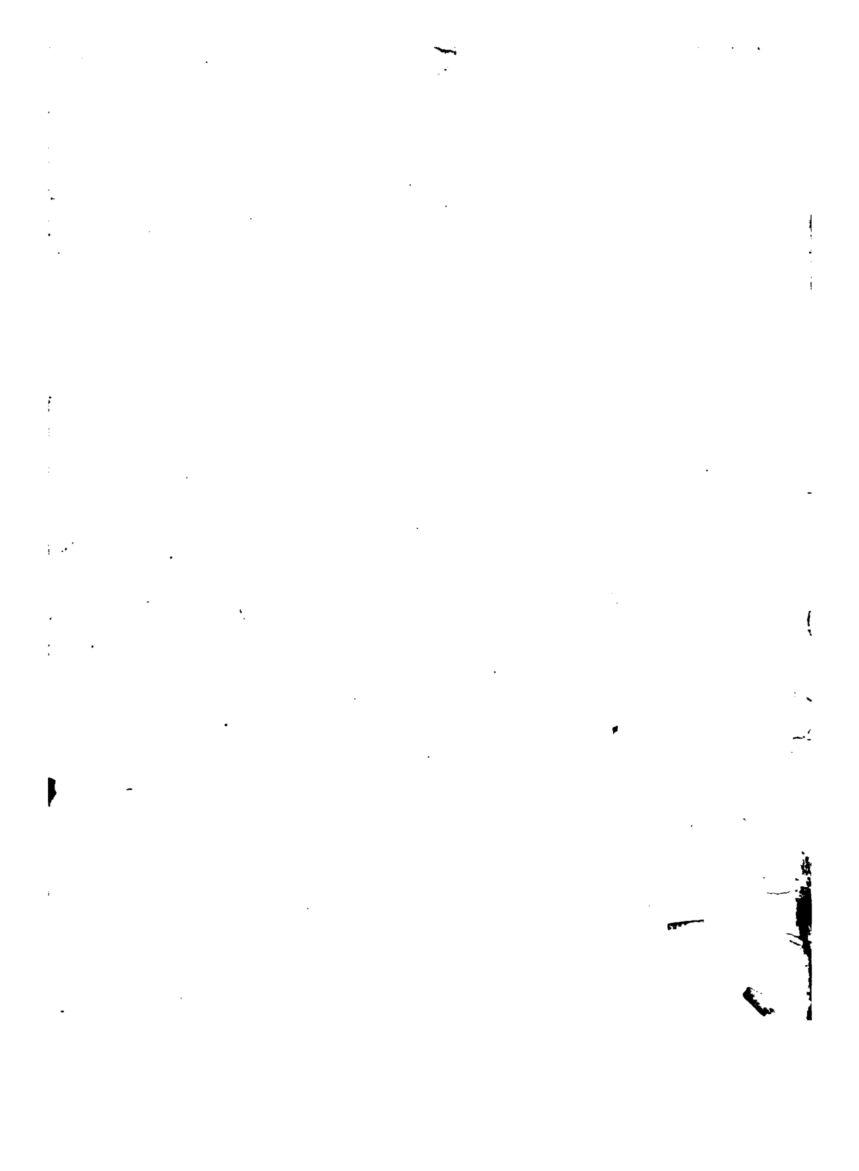
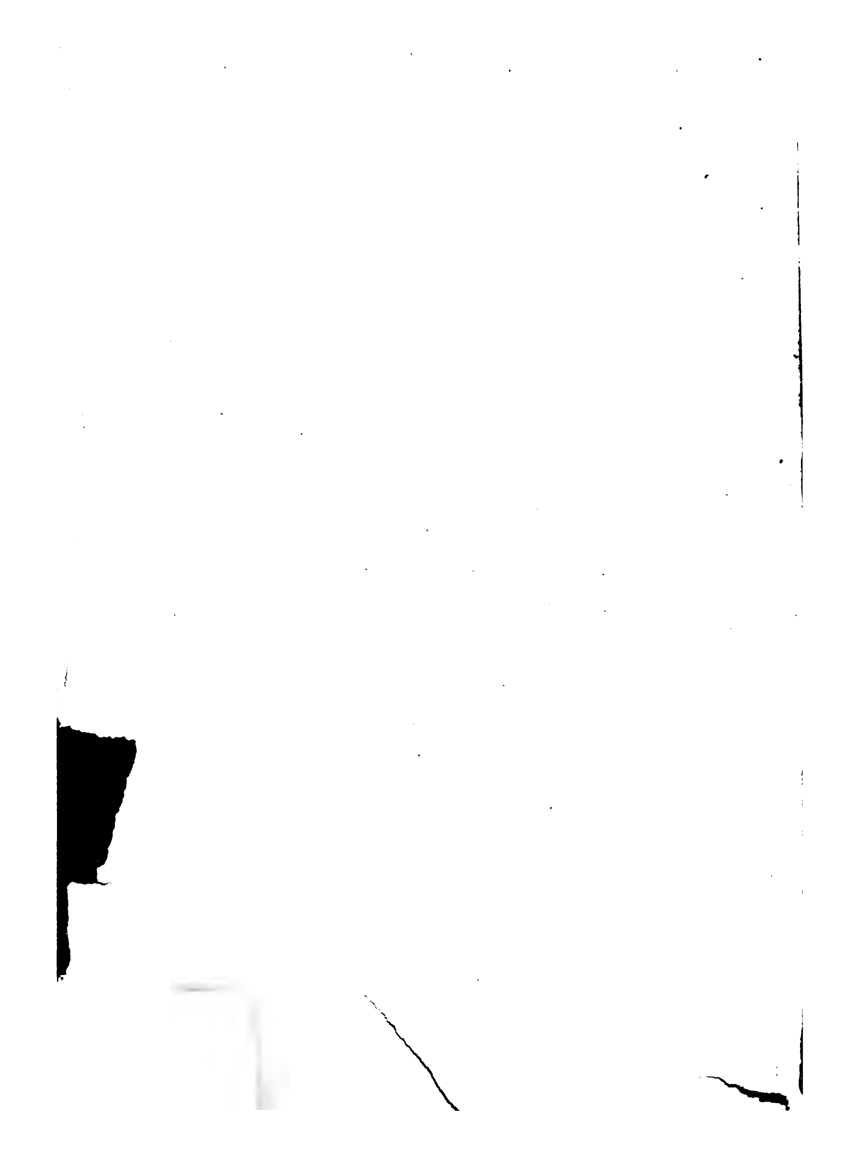








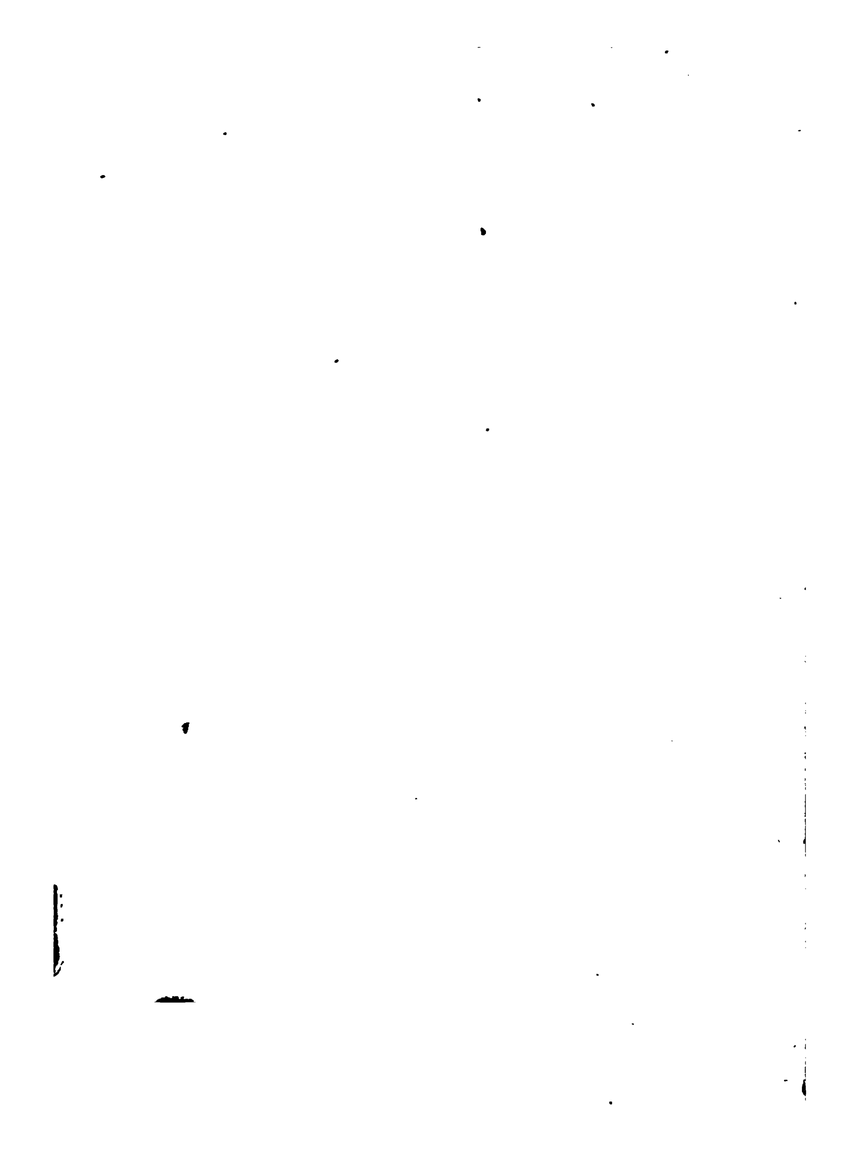
Formel-Sammlung

aus der

reinen Mathematik

und aus

den mechanischen Wissenschaften.



Formel-Sammlung

aus der

reinen Mathematik

und

aus den mechanischen Wissenschaften.

Für praktische

Baugewerk- und Maschinen-Meister,

sowie für Studirende technischer Lehr-Anstalten.

Von

C. KOPKA,

praktischer Ingenieur und Direktor der technischen Lehr-Anstalt für Bau- und Maschinen-Wesen zu Goslar,
Mitarbeiter des „Zivil-Ingenieur" und der „Romberg'schen Zeitschrift für praktische Baukunst". Verfasser der „Bau-Mechanik".

Mit ca. 500 in den Text gedruckten Holzschnitten.



Leipzig 1873.
CARL SCHOLTZE.

W. W. Beman
gt.
6-13-1923

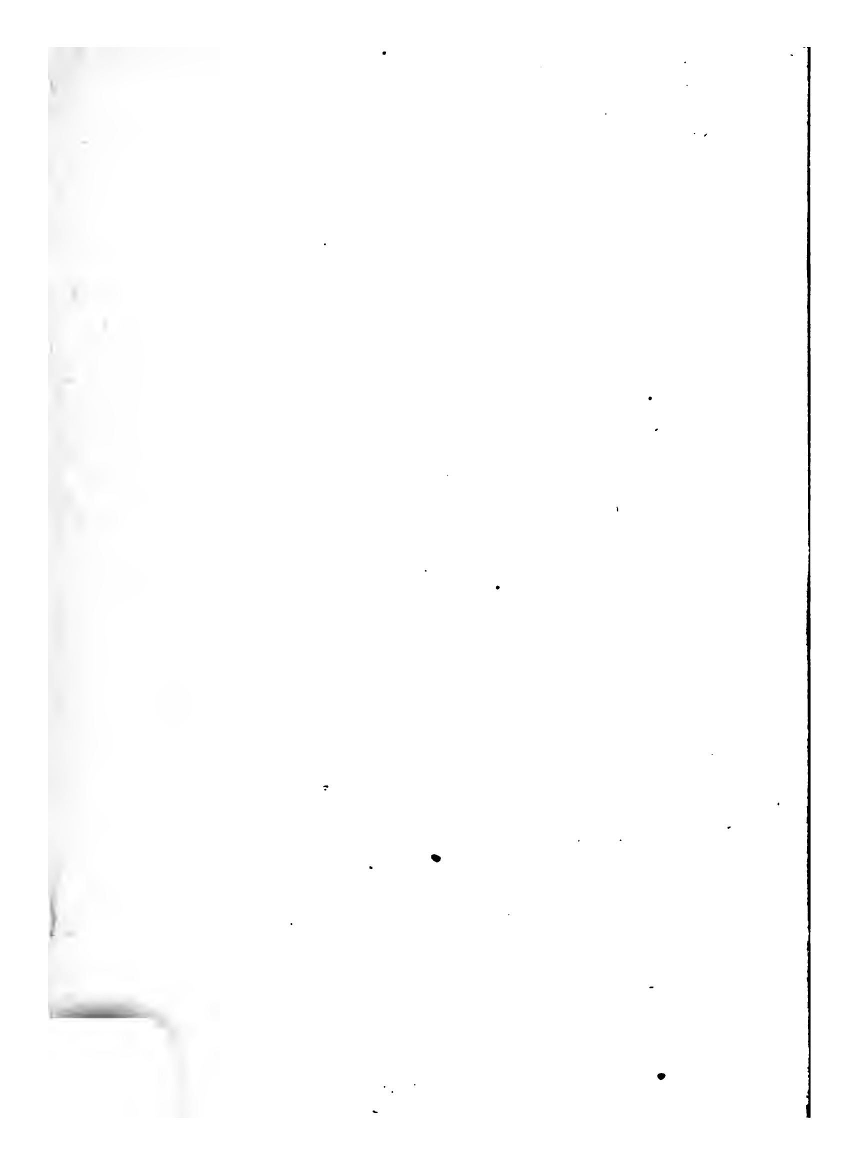
VORWORT.

Das vorliegende Werk ist ein ähnliches Buch, wie der „Ingenieur“ von Weissbach und die „Hütte“.

Bei der Zusammenstellung der Formeln und Sätze ist dem Verfasser der Gedanke leitend gewesen, den Herren Praktikanten des Bau- und Maschinenwesens eine Sammlung in die Hände zu legen, **die weder Ueberflüssiges bringt, noch des Nothwendigen entbehrt.**

Die eigene langjährige Praxis des Verfassers im Bau- und Maschinenwesen hat ihn über die Anforderungen, welche Seitens der Herren Praktikanten an ein solches Werk gemacht werden, belehrt, und ist er daher bemüht gewesen, denselben so viel wie möglich zu entsprechen.

Ingenieur C. KOPKA.



Inhalt.

Erste Abtheilung.

Zweite Abtheilung.

I. Abtheilung.

Geometrie der Ebene.

Das Dreieck.

1. Dreiecke sind congruent, wenn von den 6 Stücken $\alpha \beta \gamma$ und a b c, durch die sie bestimmt sind, 3 einander gleich sind, jedoch muss unter diesen 3 Stücken mindestens eine der 3 Seiten enthalten sein.

Figur 1.

2. Die auf der Mitte der Seiten errichteten Lothe schneiden sich alle in einem Punkte. Dieser Punkt liegt von allen 3 Ecken gleich weit entfernt.

3. Die aus den Eckpunkten auf die 3 Seiten gefällten Lothe schneiden sich gleichfalls in einem Punkte.

4. Die auf den Seiten willkürlich errichteten Lothe schneiden sich mit unter den Winkeln des Dreiecks. Dasselbe geschieht, wenn diese Linien keine Lothe sind, aber unter gleichen Winkeln gegen die Dreiecksseiten geneigt sind.

5. Die die Winkel halbirenden Transversalen schneiden sich in einem Punkte. Dieser Punkt ist von allen 3 Seiten gleich weit entfernt.

6. Die die Seiten halbirenden Transversalen schneiden sich in einem Punkte — dem Schwerpunkte.

7. Die Summe aller Winkel im Dreiecke ist gleich 2 Rechten.

8. Der Aussenwinkel ist so gross wie die Summe der gegenüberstehenden Winkel.

9. Im gleichschenkligen Dreiecke halbirt das aus der Spitze gefällte Loth die Grundlinie. Die Winkel an derselben sind gleich.

10. Im gleichseitigen Dreiecke sind alle 3 Winkel gleich. Ein jeder beträgt 60 Grad.

Das Viereck.

11. Vierecke sind congruent:

a. wenn alle 4 Seiten und 1 Winkel gleich sind,
b. wenn 3 Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich sind,
c. wenn 2 Seiten, der eingeschlossene Winkel und 2 andere Winkel gleich sind.

12. Die Summe aller Winkel ist = 4 Rechte.

13. In einem Parallelogramm stehen gleiche Winkel und auch gleiche Seiten sich gegenüber.

14. Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn

a. 2 Gegenseiten gleich und parallel sind,
b. wenn dieselben paarweise einander gleich sind,
c. wenn 2 Gegenseiten und 2 Gegenwinkel gleich sind,
d. wenn 2 Gegenseiten gleich, 2 andere parallel und 2 Gegenwinkel gleichartig sind,
e. wenn die Gegenwinkel gleich sind und beide Diagonalen.

15. Die Diagonalen in einem Parallelogramme halbiren sich gegenseitig und bilden 4 inhaltsgleiche Dreiecke.

Das Polygon.

16. Die Summe der Winkel eines n Ecks ist

$$= n \cdot 2 \text{ Rechte} - 4.$$

17. Die Summe der Aussenwinkel ist stets

$$= 4 \text{ Rechte}.$$

18. In einem n Eck beträgt die Anzahl der möglichen Diagonalen

$$\frac{n}{2}(n - 3)$$

Der Kreis.

19. Der Durchmesser ist die grösste aller Sehnen und theilt den Kreis in 2 congruente Hälften.

20. Der senkrecht auf die Sehne gezogene Halbmesser theilt Sehne und Bogen in 2 gleiche Theile.

21. Durch 3 Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, lässt sich stets ein Kreis legen.

22. Gleiche Sehnen sind vom Kreismittelpunkte gleich weit entfernt, und von 2 ungleichen Sehnen ist die kleinere die entferntere.

23. 2 Sehnen, die nicht dem Durchmesser gleich sind, können sich nicht halbiren.

24. Die Tangente berührt den Kreis nur an einem Punkte.

25. Wenn ein Kreis und eine Gerade 2 Punkte gemein haben, so schneiden sie sich.

26. Zwischen zwei parallelen Sehnen liegen gleiche Bogen.

27. Die Tangente steht senkrecht auf dem Ende des Radius.

28. 2 aus einem Punkte an den Kreis gezogene Tangenten sind gleich lang.

29. In dem um den Kreis beschriebenen Vierecke ist die Summe der Gegenseiten einander gleich.

[illegible]

39. Der von den Tangenten AB und BC eingeschlossene Winkel δ ist mit dem Centriwinkel γ zusammen = 2 Rechte.

40. In und um jeden Kreis kann man ein reguläres Polygon beschreiben, und in, sowie um jedes reguläre Polygon lässt sich ein Kreis beschreiben.

Aehnlichkeit der Figuren.

41. Zwei und mehrere in einem Punkte sich schneidende Linien heissen Convergenten. Ihre durch Querlinien a A b B gebildeten Abschnitte, die einerlei Lage haben, wie z. B. a c, c d oder a b, d f, heissen homologe Abschnitte.

Figur 4.

42. Werden die Convergenten, Figur 4, von Parallelen A a, B b geschnitten, so sind die homologen Abschnitte verhältnissgleich und umgekehrt — sind die homologen Abschnitte verhältnissgleich, so sind die Linien, durch welche sie gebildet werden — also A a und B b parallel.

43. In ähnlichen Figuren sind die Winkel paarweise einander gleich.

44. Sind die homologen Abschnitte auf den Convergenten verhältnissgleich, so stehen die Parallelen, durch welche sie gebildet werden, in demselben Verhältnisse.

45. In ähnlichen Figuren sind die homologen Seiten verhältnissgleich.

46. Sind die Parallelen a A und b B, Figur 4, mit den Convergenten-Abschnitten c A und c B proportional, so ist c der Convergenzpunkt mit der Linie a b.

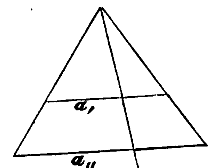
Das Dreieck.

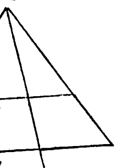
47. Dreiecke sind ähnlich, wenn, Figur 5:

Figur 5.

a. die Winkel $\alpha \beta \gamma$ paarweise gleich sind,
b. die Winkel $\beta \gamma$ paarweise gleich sind,
c. wenn alle Seiten a b c proportional gleich sind,
d. wenn 2 Seiten a und b proportional, Winkel β gleich und Winkel α gleichartig ist,
e. Wenn 2 Seiten proportional und der eingeschlossene Winkel gleich ist.

Figur 6.

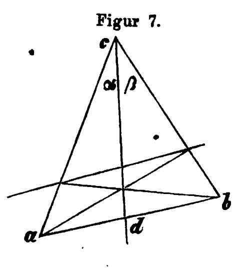




Die aus der Spitze gezogene beliebige Transversale theilt die mit der Grundlinie parallel gezogene Linie a, in Abschnitte, welche denen auf $a_{\prime\prime}$ proportional sind, Figur 6.

48. Die Höhen ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie ihre Grundlinien.

Figur 7.



49. Werden 2 Dreiecke von gleicher Höhe und Basis von Parallelen in gleichem Abstande von der Basis geschnitten, so sind diese Parallelen einander gleich.

50. Sind die Winkel α u. β, Fig. 7, einander gleich, so verhält sich:

$$a\,d : a\,c = d\,b : b\,c.$$

51. Die Transversalen, Figur 7, von denen die eine nach der Mitte der Basis und die beiden andern nach den Endpunkten einer zur Basis parallel gezogenen Linie gehen, schneiden sich in einem Punkte.

52. Die Transversalen, welche von den Eckpunkten auf die Mitte der Gegenseiten gezogen sind, schneiden sich in einem Punkte, und zwar in einer Entfernung von den Ecken, die $^2/_3$ von der betreffenden Transversale beträgt.

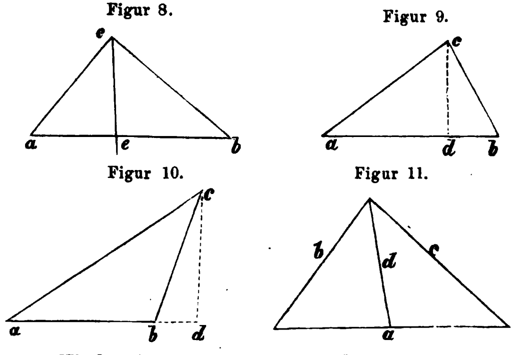
53. Die Transversale, welche in einem rechtwinkligen Dreiecke von der Spitze lothrecht auf die Basis gezogen wird, theilt dasselbe in zwei ähnliche Dreiecke.

54. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat der Hypothenuse gleich der Summe der Quadrate der Katheten.

55. Wird in einem beliebigen Dreiecke eine senkrechte Transversale auf die Basis gezogen, Figur 8, so verhält sich:

$$(a\,c + a\,e) : (b\,c + b\,e) = (b\,c - b\,e) : (a\,c - a\,e),$$

d. h. die Summe der Seiten und Abschnitte verhalten sich umgekehrt wie die Differenzen derselben.



56. Findet in einem Dreiecke die obige Proportion statt, so ist die Transversale eine senkrechte.

57. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat einer Kathete gleich dem Produkte aus Hypothenuse und dem anliegenden Abschnitte.

58. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat der aus der Spitze auf die Hypothenuse gefällten Senk-

rechten gleich dem Produkte aus den beiden Abschnitten der Hypothenuse.

59. In jedem Dreiecke ist, Figur 9 und 10:

$$\overline{ac}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{cb}^2 \mp 2\,\overline{ab} \cdot \overline{db},$$

und zwar gilt das + Zeichen, wenn der Gegenwinkel von a c stumpf und das — Zeichen, wenn er spitz ist.

60. Wenn, Figur 7, a durch d halbirt wird, so hat man:

$$b^2 + c^2 = 2\,(d^2 + \frac{1}{4}a^2).$$

Polygon und Kreis.

61. Wenn a b c d die Seiten eines Parallelogramms und $d_,$ und $d_{,,}$ seine Diagonalen sind, so hat man:

$$d_{,,}^2 + d_,^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

62. Aehnliche Polygone lassen sich in ähnliche Dreiecke zerlegen und daraus zusammensetzen.

63. Die Umfänge ähnlicher Figuren verhalten sich wie ihre homologen Seiten und auch wie die homologen Convergentenabschnitte.

64. Reguläre Polygone von gleicher Seitenzahl sind alle ähnlich.

65. Die Peripherien zweier und mehrerer Kreise verhalten sich wie ihre Radien.

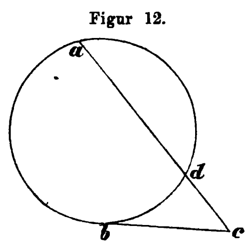
66. Die Kreissehne ist mittle Proportionale zwischen dem Durchmesser und dessen durch ein Loth gebildeten Abschnitt.

67. Konstruirt man im Halbkreise ein rechtwinkliges Dreieck über dem Durchmesser und zieht aus der Spitze ein Loth, so verhalten sich die Quadrate der Sehnen wie die darunter liegenden Abschnitte des Durchmessers.

68. Wenn aus einem Punkte der Kreisperipherie ein Loth auf den Durchmesser gefällt wird, so ist dasselbe die mittle Proportionale zu den Abschnitten des Durchmessers.

69. Die Abschnitte zweier sich schneidenden Sehnen sind verhältnissgleich.

70. Desgleichen die Abschnitte zweier aus einem Punkte durch den **Kreis** gezogenen Sekanten.



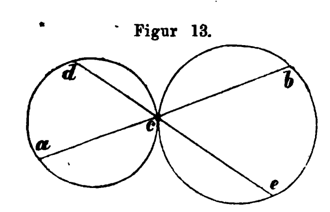
Figur 12.

71. Wird aus einem Punkte c, Figur 12, eine Tangente und eine Sekante zum Kreise gezogen, so ist die Tangente die mittle Proportionale zur Sekante und ihrem äusseren Abschnitte also:

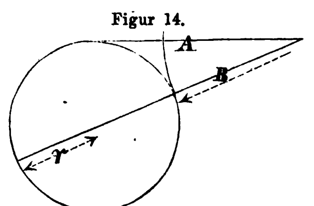
$$dc : bc = bc : ac.$$

72. Die Abschnitte zweier durch den Berührungspunkt gezogenen Sekanten sind proportional also:

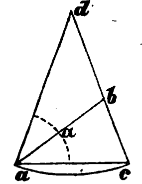
$$ac : cb = cd : ce. \text{ Figur 13.}$$



Figur 13.



Figur 14.



Figur 15.

73. Wenn die Tangente $A = 2r$ gemacht und die Sekante durch den Mittelpunkt des Kreises gezogen wird, Figur 14, so ist:

$$A : B = B : A - B.$$

74. Trägt man B auf A ab, so ist A nach dem äusseren und mittleren Verhältnisse getheilt. Sectio divina.

75. Der Centriwinkel eines Zehnecks ist:

$$= \frac{2}{5} \text{ Rechte, und Winkel } \alpha = \frac{4}{5} \text{ Rechte.}$$

76. Halbirt man α, Figur 15, so ist:

$$\triangle\, a\,b\,c \sim \triangle\, a\,c\,d,$$

und
$$a\,c : b\,c = d\,c : a\,c,$$

da
$$a\,c = a\,b = d\,b$$

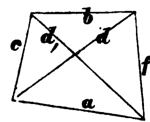
ist, so ist auch

$$d\,b : b\,c = d\,c : d\,b,$$

oder
$$b\,c : d\,b = d\,b : d\,c,$$

d. h. die Seite des Zehnecks findet man, indem man den Radius nach der Sectio divina theilt.

Figur 16.



77. Bei jedem in dem Kreise beschriebenen Vierecke ist:

$$d\,.\,d_{,} = a\,b + c\,f. \quad \text{Figur 16.}$$

78. Die gemeinsame Achse zweier Kreise und die gemeinsamen Tangenten beider Kreise convergiren in einem Punkte.

79. Die von einem Punkte der gemeinsamen Sekante zweier sich schneidender Kreise an dieselben gezogenen Tangenten sind gleich.

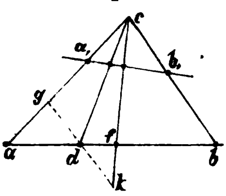
Figur 17.

80. Wenn man durch die Mitte des Abstandes der Berührungssehne zweier Kreise eine Senkrechte zieht, so sind die aus irgend einem Punkte k derselben an die Kreise gezogenen Tangenten t u. t einander gleich. Fig. 17.

Harmonische Theilung.

81. Wird auf der Linie d b, Figur 18, ein Punkt f angenommen und in der Verlängerung von d b ein Punkt a

so bestimmt, dass die Abstände des Punktes f von d und b proportional sind den Abständen des Punktes a von d und b, so ist die Linie d b nach a harmonisch getheilt.



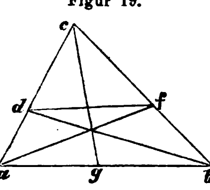
Figur 18.

Die Punkte a und f, d und b heissen harmonische Gegenpunkte, die Linien $\overline{ac}$ und $\overline{cf}$, sowie c d und c b harmonische Gegenstrahlen.

82. Eine Gerade d b wird nach a harmonisch getheilt, indem man aus den 3 Punkten a d b Strahlen nach einem beliebigen Punkte c zieht, hierauf durch d die Linie g k parallel c b legt, g d = d k macht und k c zieht. Der Schnittpunkt f ist der harmonische Gegenpunkt von a.

83. Zu 3 harmonischen Strahlen findet man den vierten, wenn man durch die Strahlen die Linie a b legt und auf ihr nach dem vorigen den Punkt f sucht.

84. Harmonische Strahlen werden von jeder beliebigen Geraden in harmonischen Punkten geschnitten. Figur 18, Linie $a_, b_,$.



Figur 19.

85. Werden in einem Dreiecke 3 Transversalen gezogen, wovon die eine c g die Basis halbirt und die beiden andern deren Endpunkte mit einer Parallele d f verbinden, so ist c g harmonisch getheilt. Fig. 19.

86. Werden die Seiten des Dreiecks in den Punkten d f g halbirt, und Parallelen d g und g f gezogen, so sind alle 3 Transversalen harmonisch getheilt.

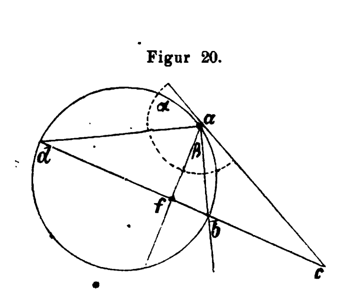
87. Der harmonische Gegenstrahl a b einer Geraden a d, Fig. 20, welcher den Winkel β halbirt, steht mit a d senkrecht.

88. Steht ein harmonischer Strahl auf dem anderen senkrecht, so werden die Winkel α und β, Figur 20, halbirt.

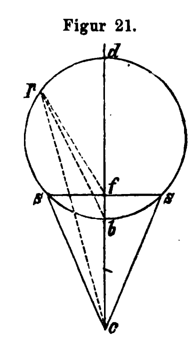
89. Ein Punkt c ausserhalb des Kreises, Figur 21, hat einen harmonischen Gegenpunkt f auf der Mitte der Berührungssehne s s.

90. Beschreibt man durch die harmonischen Punkte d und b einen Kreis, so dass Linie d b Durchmesser wird, so

Figur 20.



Figur 21.



sind die Abstände sämmtlicher Punkte seiner Peripherie von den harmonischen Punkten f und c verhältnissgleich.

Für den beliebigen Punkt c ist z. B.:

$$p\,f : p\,c = b\,f : b\,c.$$

Reguläre Polygone.

Bezeichnet

n die Anzahl der Seiten,
t die Länge der Seiten eines um den Kreis beschriebenen n Ecks,
s die Seitenlänge des in den Kreis beschriebenen n Ecks,
r den Radius,
y die Seite des in den Kreis beschriebenen 2 n Ecks,

so ist:

$$91. \quad t = \frac{r\,s}{\sqrt{r^2 - {}^1\!/_4\, s^2}},$$

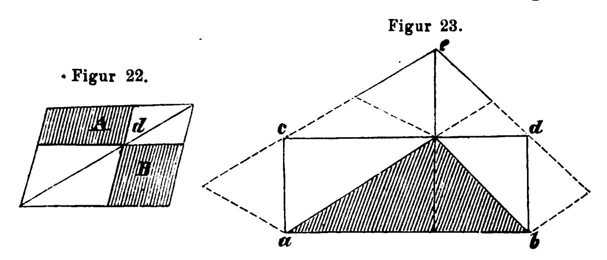
$$y = \sqrt{(2\,r^2 - 2\,r\sqrt{r^2 - {}^1\!/_4\, s^2})},$$

$$y = r\sqrt{\left(2 - \frac{2\,s}{t}\right)}.$$

Flächenverhältnisse.

92. Parallelogramme von gleicher Basis und gleicher Höhe haben gleichen Flächengehalt. Ebenso Dreiecke von gleicher Basis und gleicher Höhe.

93. Wenn man durch einen beliebigen Punkt d der Diagonale eines Parallelogramms, Figur 22, Parallelen mit den Seiten zieht, so sind die Flächen A und B einander gleich.



Figur 22. Figur 23.

94. Das Quadrat der Summe oder Differenz zweier Linien ist gleich der Summe der Quadrate beider + oder 2 mal dem aus beiden gebildeten Rechtecke.

95. Wenn man, Figur 23, über 2 Seiten eines beliebigen Dreieckes beliebige Parallelogramme konstruirt, ihre Aussenseiten bis zum Schnittpunkte c verlängert, von c durch die Spitze des Dreieckes bis zur Basis eine Gerade zieht und mit dieser von a und b aus Parallellinien legt, so entsteht

ein Parallelogramm a b c d, dessen Fläche gleich ist der Summe der beiden anderen Parallelogramme.

96. Die Flächenräume zweier Parallelogramme oder Dreiecke verhalten sich bei gleicher Höhe wie ihre Grundlinien und umgekehrt.

97. Die Flächenräume zweier Parallelogramme, die gleiche Winkel haben, verhalten sich wie die Produkte aus 2 anliegenden Seiten.

98. Die Flächenräume zweier Dreiecke, die einen Winkel gleich haben, verhalten sich wie die Produkte aus den ihn einschliessenden Seiten.

99. Die Flächenräume ähnlicher Dreiecke und Polygone verhalten sich wie die Quadrate der homologen Seiten und auch wie die Quadrate der homologen Convergentenabschnitte.

100. Die Flächenräume zweier Kreise verhalten sich wie die Quadrate der Halbmesser.

101. Der Flächeninhalt eines Sektors (Kreisausschnittes) verhält sich zur ganzen Kreisfläche wie der Bogen zur ganzen Peripherie.

Arithmetik — Algebra.

Entgegengesezte Grössen.

Bedeutet:

Σp die Summe aller positiven zu addirenden Grössen,

Σn jene aller negativen,

D die Differenz beider,

so ist: $$\Sigma p + \Sigma n = + D, \text{ wenn } p > n,$$
$$= - D, \quad „ \quad p < n.$$

Ferner ist:

$$\begin{array}{r} \pm a \\ \text{minus } \pm b \\ \hline = \pm a \mp b, \end{array}$$

$$\pm a \times \pm b = + a b,$$
$$\pm a \times \mp b = - a b,$$
$$\frac{\pm a}{\pm b} = + \frac{a}{b},$$
$$\frac{\pm a}{\mp b} = \frac{\mp a}{\pm b} = - \frac{a}{b}.$$

Algebraische Zeichen und Operationen.

$$a + b + c = b + c + a = c + a + b.$$
$$a + (- b) = a - b = - (b - a) = - (- a + b).$$

$$a - (+b) = a + (-b).$$

$$a - (-b) = a + (+b) = a + b.$$

$$a + (b + c - d) + m = a + b + c - d + m.$$

$$a - (b + c - d) + m = a - b - c + d + m$$

$$a b = b a.$$

$$a(b + c) = a b + a c; \quad a(b - c) = a b - a c,$$
$$= a c + a b; \qquad\qquad = - a c + a b$$

$$- a(b + c) = - a b - a c = -(a b + a c).$$

$$a[b + c(d + g - f)] = a b + a c(d + g - f)$$
$$= a b + a c d + a c g - a c f.$$

$$a[b - c(d + g - f)] = a b - a c(d + g - f)$$
$$= a b - a c d - a c g + a c f.$$

$$(a + b)[+ d + (f - g + k) - m + k(z + y)]$$
$$= (a + b) d + (a + b)(f - g + k) - (a + b) m +$$
$$(a + b)(z + y) k,$$

$$(\pm a):(\pm b) = a:b = +\frac{a}{b},$$

$$(-a):(+b) = (+a):(-b) = -\frac{a}{b},$$

$$\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c},$$

$$\frac{a b}{c} = \frac{a}{c} \cdot b = a \cdot \frac{b}{c},$$

$$\frac{a}{b c} = \frac{a}{b} : c = \frac{a}{c} : b.$$

Brüche.

$$\frac{a}{b} = \frac{a m}{b m} = \frac{a : m}{b : m},$$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a\,d}{b\,d} \pm \frac{b\,c}{b\,d} = \frac{a\,d \pm b\,c}{b\,d},$$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} \pm \frac{d}{b} \cdots = \frac{a \pm c \pm d \cdots}{b}.$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d},$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a\,d}{b\,c},$$

$$\frac{o}{a} = o,$$

$$\frac{a}{o} = \infty \quad \text{(unendlich)},$$

$$\frac{o}{o} = x \quad \text{(unbestimmt)},$$

$$\frac{\infty}{\infty} = x \quad \text{(unbestimmt)}.$$

Näherungswerthe.

Wenn $\frac{a}{b} = m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \text{etc.}}}}}$,

so sind die Näherungswerthe für $\frac{a}{b}$:

$$m = \frac{m}{1},\ m + \frac{1}{n} = \frac{m\,n + 1}{n},\ m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p}} = \frac{(m\,n + 1)\,p + m}{n\,p + 1},$$

$$m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q}}} = \frac{[(mn + 1)p + m]q + mn + 1}{(np + 1)q + n} \text{ etc.}$$

Beispiel. Der Bruch $\frac{124}{103}$ gibt durch Division des jedesmaligen Restes in den vorhergehenden Divisor, also durch die Rechnung:

$$\begin{array}{l} 124 : 103 = 1, \\ 103 \\ \hline 103 : 21 = 4, \\ 84 \\ \hline 21 : 19 = 1, \\ 19 \\ \hline 19 : 2 = 9, \\ 18 \\ \hline 2 : 1 = 2, \\ 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

die Quotienten: 1, 4, 1, 9, 2; er lässt sich daher

$$= 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2}}}}$$

setzen und durch folgende Näherungswerthe, wovon die folgenden immer genauer und genauer werden, ausdrücken:

$$\frac{1}{1}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{59}{49}, \frac{124}{103}.$$

Sind $\frac{a_1}{b_1}$ und $\frac{a_2}{b_2}$ zwei auf einander folgende Nähe-

rungswerthe von $\frac{a}{b}$ und r der folgende Nenner oder Quotient, so findet man den entsprechenden Näherungswerth durch die Formel: $\frac{a_3}{b_3} = \frac{r\,a_2 + a_1}{r\,b_2 + b_1}$. Z. B. für das Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser: 3,14159 ... $= \frac{314159}{100000}$ führt folgende Rechnung:

```
                314159 : 100000 = 3
                300000
         100000 : 14159 = 7
          99113
     14159 : 887 = 15
      887
       5289
       4435
   887 : 854 = 1
   854
    33 u. s. w.
```

auf die Quotienten 3, 7, 15, 1 u. s. w. Die hieraus bestimmten Näherungswerthe sind: $\frac{3}{1}$, $3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}$, ferner nach der letzten Regel:

$$\frac{22 \times 15 + 3}{7 \times 15 + 1} = \frac{333}{106}, \quad \frac{333 \times 1 + 22}{106 \times 1 + 7} = \frac{355}{113}, \text{ u. s. w.}$$

Der Fehler eines Näherungswerthes $\frac{a_n}{b_n}$ ist kleiner als $\left(\frac{1}{b_n}\right)^2$; also für $\frac{22}{7}$ kleiner als $\frac{1}{49}$, für $\frac{333}{106}$ kleiner als $\frac{1}{11236}$ oder 0,000089 u. s. w.

Potenzen.

$$a^m \cdot b^m = (a\,b)^m,$$

$$a^m : b^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m,$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

$$a^m : a^n = a^{m-n},$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n},$$

$$(-a)^{2m} = a^{2m},$$

$$(-a)^{2m+1} = -a^{2m+1},$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2\,a\,b + b^2,$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2,$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 \pm b^3,$$

$$a^0 = 1;\ a^1 = a,$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m},$$

$$a^m = \frac{1}{a^{-m}},$$

$$a^{-\infty} = 0,$$

$$1^m = 1,$$

$$a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a},$$

$$a^m = \sqrt[\frac{1}{m}]{a}.$$

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a\,b} = (a\,b)^{\frac{1}{m}}.$$

$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

$$\sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n = a^{\frac{n}{m}}.$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = a^{\frac{1}{m.n}} = \sqrt[mn]{a}.$$

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m:p]{a^{n:p}}.$$

$$\sqrt[2n]{a} = \pm b; \sqrt[2n]{-a} = b \sqrt{-1} = b\,i.$$

$$\sqrt[2n+1]{a} = +c; \quad \sqrt[2n+1]{-a} = -c.$$

Wenn:

$$\sqrt{c} = a + b$$

gesetzt wird, so folgt:

$$c = a^2 + 2ab + b^2$$

und:

$$b = \frac{c - a^2}{2a + b} < \frac{c - a^2}{2a}.$$

Wenn:

$$\sqrt[3]{c} = a + b$$

gesetzt wird, so folgt:

$$c = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

und:

$$b = \frac{c - a^3}{3a^2 + 3ab + b^2} < \frac{c - a^3}{3a^2}.$$

Hierauf gründet sich das Ausziehen der $\sqrt{}$ aus Zahlen.

Beispiele.

$$\sqrt{131044} = 360 + 2 = 362$$

denn	13	10	44
$3^3 =$	9		
	4	10	
$2 \cdot 3 =$	•	(6)	
$2 \cdot 3 \cdot 3 =$	3	6	
$6^2 =$	•	36	
	3	96	
		14	44
$2 \cdot 36 =$		(7	2)
$2 \cdot 36 \cdot 2 =$		14	4
$2^2 =$		•	4
		14	44

$$\sqrt[3]{17\,|\,173\,|\,512} = 250 + 8 = 258$$

	17	173	512
$2^3 =$	8		
	9	173	
$3 \times 2^2 =$	(1	2)..	
$2 \times 2^2 \times 5 =$	6	0..	
$3 \times 2 \times 5^2 =$	1	50.	
$5^3 =$		125	
	7	625	
	1	548	512
$3 \times 25^2 =$		(187	5)
$3 \times 25^2 \times 8 =$	1	500	0
$3 \times 25 \times 8^2 =$		48	00
$8^3 =$			512
	1	548	512

$$\sqrt[3]{5,8} = 1,7967 \cdot\cdot$$

1			
4	800		
	(3)		
2	1		
1	47		
	343		
2	913		
	887	000	
	(86	7)	
	780	3	
	41	31	
		729	
	822	339	
	64	661	000
	(9	612	3)

Logarithmenrechnung.

I. $\log. (a\,b) = \log. a + \log. b.$

Regel: Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe aus den Logarithmen der Faktoren.

Z. B.: $\log. (453 \times 2,9734) = \log. 453 + \log. 2,9734$

$$= \begin{Bmatrix} 2,65610 \\ 0,47325 \end{Bmatrix}$$
$$\overline{3,12935}$$

daher: $453 \times 2,9734 = \text{num. } 3,12935 = 1346,95.$

II. $$\log.\left(\frac{a}{b}\right) = \log.a - \log.b.$$

Regel: Der Logarithmus eines Bruches oder Quotienten ist gleich der Differenz von den Logarithmen des Zählers und Nenners oder des Dividenden und Divisors.

Z. B.: 1) $$\log.\left(\frac{85{,}79}{0{,}1648}\right) = \log.85{,}79 - \log.0{,}1648$$
$$= \begin{cases} 1{,}93344 \\ -0{,}21696 - 1 \end{cases}$$
$$= 2{,}71648,$$

daher: $$\frac{85{,}79}{0{,}1648} = \text{num. } 2{,}71648 = 520{,}57.$$

2) $$\log.\left(\frac{0{,}0874 \times 2945}{0{,}003642}\right) = \log.0{,}0874 + \log.2945 - \log.0{,}003642$$

$$\log.0{,}0874 = 0{,}94151 - 2$$
$$\log.\ \ 2945 = 3{,}46909$$
$$2{,}41060$$
$$\log.0{,}003642 = 0{,}56134 - 3$$
$$\frac{0{,}0874 \times 2945}{0{,}003642} = \text{num. } 4{,}84926 = 70674.$$

III. $$\log.(a^m) = m \log.a.$$

Regel: Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkte aus dem Exponenten und dem Logarithmus der Grundzahl.

Beispiele:

1) $\log.(1{,}765^3) = 3 \times \log.1{,}765 = 3 \times 0{,}24674$
$= 0{,}74022$

$1{,}765^3 = \text{num. } 0{,}74022 = 5{,}4982.$

$$2)\ \log. \sqrt[3]{43,59} = \log. 43,59^{1/3} = \frac{\log. 43,59}{3}$$

$$= 1,63939 : 3 = 0.54646$$

$$\sqrt[3]{43,59} = \text{num.} \smile 0,5464\,6 = 3,5193.$$

$$3)\ \log. \sqrt[5]{0,037^3} = \log. (0,037^{3/5}) = \frac{3}{5} \times \log. 0,037$$

$$= \frac{3}{5} \times \begin{array}{l} 0,56820 - 2 \\ \hline 0.70460 - 5 \\ \hline 0,14092 - 1 \end{array}$$

$$\sqrt[5]{0,037^3} = 0,13833 \cdots$$

Gleichungen.

Wenn $x \pm a = b$, so ist auch $x = b \mp a$.

Wenn $\frac{x}{a} = b$, so ist auch $x = a\,b$.

Wenn $\sqrt[m]{x} = b$, so ist auch $x = b^m$.

Wenn $x^m = b$, so ist auch $x = \sqrt[m]{b}$.

Wenn $a^x = b$, so ist auch $x \log. a = \log. b$.

Ist $a : b = c : d$, so ist auch $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,

$$a\,d = b\,c,$$

$$a = \frac{b\,c}{b}.$$

Ist: $x : a = b : x$, so ist auch $a : x = x : b$

$$x^2 = a\,b$$

$$x = \sqrt{a\,b}.$$

Ist: $x : a = b : c$, so ist auch $x : b = a : c$

$$(x \pm a) : a = (b \pm c) : c.$$

Gleichungen I. Grades mit mehreren Unbekannten.

I. Ist:

$$X + Y = S$$

und

$$X - Y = D,$$

so ist:

$$X = \frac{S + D}{2};\quad Y = \frac{S - D}{2}.$$

II. Ist:

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$

und zugleich:

$$a_2 x + b_2 y = c_2,$$

so folgt:

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \text{ und } y = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{b_1 a_2 = b_2 a_1}.$$

Beispiel. Ist:

$$3x + 2y = 33 \text{ und } 5x - 2y = 7,$$

so erhält man:

$$x = \frac{-33 \times 2 - 7 \times 2}{-\;3 \times 2 - 5 \times 2} = \frac{66 + 14}{6 + 10} = \frac{80}{16} = 5$$

und:

$$y = \frac{33 \times 5 - 7 \times 3}{5 \times 2 + 3 \times 2} = \frac{144}{16} = 9.$$

III. Ist:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$

und:

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3,$$

so ergibt sich:

$$x = \frac{d_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + d_2 (b_3 c_1 - b_1 c_3) + d_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)}{a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2 (b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)},$$

$$y = \frac{d_1(a_2 c_3 - a_3 c_2) + d_2(a_3 c_1 - a_1 c_3) + d_3(a_1 c_2 - a_2 c_1)}{b_1(a_2 c_3 - a_3 c_2) + b_2(a_3 c_1 - a_1 c_3) + b_3(a_1 c_2 - a_2 c_1)},$$

$$z = \frac{d_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + d_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + d_3(a_1 b_2 - a_2 b_1)}{c_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + c_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + c_3(a_1 b_2 - a_2 b_1)},$$

Beispiel. Wenn:

$$2x + 5y - 7z = -288,$$
$$5x - y + 3z = 227,$$
$$7x + 6y + z = 297;$$

dann folgt:

$$x = \frac{288 \times 19 - 227 \times 47 + 297 \times 8}{-2 \times 19 - 5 \times 47 + 7 \times 8} = \frac{2821}{217} = 13,$$

$$y = \frac{288 \times 16 - 227 \times 51 + 297 \times 41}{-5 \times 16 + 1 \times 51 + 6 \times 41} = \frac{5208}{217} = 24,$$

$$z = \frac{-288 \times 37 + 227 \times 23 - 297 \times 27}{-7 \times 37 + 3 \times 23 - 1 \times 27} = \frac{13454}{217} = 62.$$

Quadratische Gleichungen.

Ist:
$$x^2 + ax = b,$$
so folgt:
$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{b + \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Ist:
$$x^{2n} + ax^n = b,$$
so folgt:
$$x = \sqrt[n]{-\frac{a}{2} \pm \sqrt{b + \left(\frac{a}{2}\right)^2}}.$$

Trigonometrische Auflösung der quadratischen Gleichungen:
$$x^2 - ax + b = 0.$$

I. $\text{Sin.}\,\varphi^4 - r^2 \sin.\varphi^2 - \frac{1}{4} r^2 \cdot \sin. 2\varphi^2 = 0,$

$$\sin. 2\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a},$$

$$r^2 = a,$$

$$x = a \sin.\varphi^2,$$

$$= a \cos \varphi^2.$$

II. $$x^2 + a\,x - b = 0.$$

$$\text{tang.}\varphi^2 + \frac{2\,r^2}{\text{Tg}\,2\,\varphi}\,\text{tang.}\,\varphi - r^2 = 0,$$

$$\text{tang.}\,2\,\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a},$$

$$r^2 = b,$$

$$x = \sqrt{b} \cdot \text{tang.}\,\varphi.$$

$$= \sqrt{b} \cdot - \cot \varphi.$$

Setzt man in die Gleichung $x^2 - a\,x - b = 0$ wie vorher $x = \sqrt{b}$ tang. φ, so muss x negativ oder, wenn $x = - \cot \varphi \sqrt{b}$ ist, positiv genommen werden.

Wenn: $$x\,y = p$$

und $$x + y = s,$$

so ist: $$x = \frac{s + \sqrt{s^2 - 4\,p}}{2},$$

$$y = \frac{s - \sqrt{s^2 - 4\,p}}{2}.$$

Cubische Gleichungen.

Die Gleichung:

$$x^3 + a\,x^2 + b\,x + c = 0,$$

geht über in: $$x_1^3 + b_1\,x_1 + c_1 = 0,$$

wenn man setzt:

$$x_1 = x - \frac{a}{3},$$

$$b_1 = b - \frac{a^2}{3},$$

$$c_1 = c - \frac{a\,b}{3} + \frac{2}{27}\,a^3.$$

Alsdann ist:

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{c_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{b_1}{3}\right)^3 + \left(\frac{c_1}{2}\right)^2}},$$

$$+ \sqrt{-\frac{c_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{b_1}{3}\right)^3 + \left(\frac{c_1}{2}\right)^2}}.$$

Die vorstehende (Cardanische) Formel führt auf ein reelles Resultat, entweder wenn b positiv, oder wenn b negativ und zugleich

$$\left(\frac{b_1}{3}\right)^3 < \left(\frac{c_1}{2}\right)^2 \text{ ist.}$$

Trigonometrische Auflösung der cubischen Gleichung.

$$x^3 + b\,x + c = 0,$$

$$y = \sqrt{-\frac{4}{3}\,b},$$

$$\sin. 3\,\varphi = \frac{c}{2}\left(-\frac{3}{b}\right)^{3/2},$$

$$x = y \sin. \varphi,$$

$$= y \sin. (60 - \varphi),$$

$$= - y \sin. (60 + \varphi).$$

Die Formel ist nur anwendbar, wenn b negativ und:

$$\left(\frac{b}{3}\right)^3 > \left(\frac{c}{2}\right)^2 \text{ ist.}$$

Auflösung höherer Gleichung durch Näherung.

Ist x_1 ein Näherungswerth von

$$x^2 + a x + b = 0,$$

so folgt:

$$x = \frac{x_1^2 - b}{2 x_1 + a}.$$

Ist x_1 ein Näherungswerth von:

$$x^3 + a x^2 + b x + c = 0,$$

so ist:

$$x = \frac{2 x_1^3 + a x_1^2 - c}{3 x_1^2 + 2 a x_1 + b}.$$

Ist x_1 ein Näherungswerth von:

$$x^4 + a x^3 + b x^2 + c x + d = 0,$$

so ist:

$$x = \frac{3 x_1^4 + 2 a x_1^3 + b x_1^2 - d}{4 x_1^3 + 3 a x_1^2 + 2 b x_1 + c},$$

Ist x_1 ein Näherungswerth von:

$$x^5 + a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + c = 0,$$

so ist:

$$x = \frac{4 x_1^5 + 3 a x_1^4 + 2 b x_1^3 + c x_1^2 - c}{5 x_1^4 + 4 a x_1^3 + 3 b x_1^2 + 2 c x_1 + d}.$$

Gibt die numerische Gleichung

$$X = 0$$

für den Näherungswerth x_1 das kleine Resultat X_1 und für den Näherungswerth x_2 das kleine Resultat X_2, so ist:

$$x = \frac{x_1 X_2 - x_2 X_1}{X_2 - X_1}.$$

Methode der kleinsten Quadrate.

Hat man für ein und dieselbe Grösse x die mit unbekannten kleinen Fehlern behafteten Werthe:

$$x_1\ x_2\ x_3 \cdots x_n,$$

so ist:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 \cdots x_n}{n}.$$

Hat man für die der Formel:

$$y = \alpha u + \beta v$$

entsprechenden veränderlichen Grössen u v y die zusammengehörigen mit kleinen Fehlern behafteten Werthe:

$$\begin{matrix} y_1 & u_1 & v_1, \\ y_2 & u_2 & v_2, \\ y_3 & u_3 & v_3, \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & u_n & v_n \end{matrix}$$

gefunden, so sind die wahrscheinlichen Werthe der constanten Faktoren (α und β) folgende:

$$\alpha = \frac{\Sigma v^2 \Sigma u y - \Sigma u v \Sigma v y}{\Sigma u^2 \Sigma v^2 - \Sigma u v \Sigma u v},$$

$$\beta = \frac{\Sigma u^2 \Sigma v y - \Sigma u v \Sigma u y}{\Sigma u^2 \Sigma v^2 - \Sigma u v \Sigma u v}.$$

Sind für die Formel:

$$y = \alpha u + \beta v + \gamma \omega$$

die nur mit kleinen Fehlern behafteten Werthe:

$$\begin{matrix} y_1 & u_1 & v_1 & \omega_1, \\ y_2 & u_2 & v_2 & \omega_2, \\ y_3 & u_3 & v_3 & \omega_3 & \text{u. s. w.} \end{matrix}$$

bekannt, so lassen sich die richtigen Werthe der Koëffizienten $\alpha\, \beta\, \gamma$ durch folgende Gleichungen bestimmen:

$$\alpha \Sigma u^2 + \beta \Sigma u \nu + \gamma \Sigma u \omega = \Sigma u y,$$
$$\beta \Sigma \nu^2 + \alpha \Sigma u \nu + \gamma \Sigma \nu \omega = \Sigma \nu y,$$
$$\gamma \Sigma \omega^2 + \alpha \Sigma u \omega + \beta \Sigma \nu \omega = \Sigma \omega y.$$

Reihen.

$$(a \pm x)^2 = a^2 \pm 2\, a\, x + x^2,$$
$$(a \pm x)^3 = a^3 \pm 3\, a^2 x + 3\, a\, x^2 \pm x^3,$$
$$(a \pm x)^4 = a^4 \pm 4\, a^3 x + 6\, a^2 x^2 \pm 4\, a\, x^3 + x^4,$$
$$(a \pm x)^5 = a^5 \pm 5\, a^4 x + 10\, a^3 x^2 \pm 10\, a^2 x^3 + 5\, a\, x^4 \pm x^5,$$
$$(a \pm x)^6 = a^6 \pm 6\, a^5 x + 15\, a^4 x^2 \pm 20\, a^3 x^3 + 15\, a^2 x^4 \pm 6\, a\, x^5 + x^6,$$
$$(a \pm x)^7 = a^7 \pm 7\, a^6 x + 21\, a^5 x^2 \pm 35\, a^4 x^3 + 35\, a^3 x^4 \pm 21\, a^2 x^5 + 7\, a\, x^6 \pm x^7.$$

Binomische Reihe.

$$(a \pm x)^n = a^n \pm n\, a^{n-1} x + \frac{n\,(n-1)}{1 \cdot 2}\, a^{n-2} x^2 \pm \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\, a^{n-3} x^3 + \cdots,$$

$$(a + x)^n = a^n \left[1 + n \left(\frac{x}{a}\right) + \frac{n\,(n-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{x}{a}\right)^3 + \cdots \right],$$

$$(a + x)^n = a^n \left[1 + n\left(\frac{x}{a + x}\right) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\left(\frac{x}{a + x}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{x}{a + x}\right)^3 + \ldots\right],$$

$$\sqrt{a + x} = (a + x)^{1/2} = \sqrt{a}\left[1 + {}^1/_2\left(\frac{x}{a}\right) - {}^1/_8\left(\frac{x}{a}\right)^2 + {}^1/_{16}\left(\frac{x}{a}\right)^3 - {}^5/_{128}\left(\frac{x}{a}\right)^4 + {}^7/_{256}\left(\frac{x}{a}\right)^5 - \ldots\right],$$

$$\sqrt[3]{a + x} = (a + x)^{1/3} = \sqrt[3]{a}\left[1 + {}^1/_3\left(\frac{x}{a}\right) - {}^1/_9\left(\frac{x}{a}\right)^2 + {}^5/_{81}\left(\frac{x}{a}\right)^3 - {}^{10}/_{243}\left(\frac{x}{a}\right)^4 + {}^{22}/_{729}\left(\frac{x}{a}\right)^5 - \ldots\right].$$

Exponentialreihe.

$$a^x = (1 + z)^x = 1 + A x + \frac{A^2}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{A^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \frac{A^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 \ldots,$$

Darin ist:

$$A = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} \ldots.$$

Setzt man $A = 1$ und $x = 1$, so ergibt sich die Basis des natürlichen Logarithmensystems:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \ldots = 2{,}718281828459.$$

Alsdann ist:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

und wenn $(\ln : a)$ den natürlichen Logarithmus von a bezeichnet:

$$a^x = 1 + \frac{(\ln : a)}{1} x + \frac{(\ln : a)^2}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{(\ln : a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots,$$

$$\ln : (x + 1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots,$$

$$\ln : (x + 1) - \ln : x = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \cdots,$$

$$\ln : (x + 1) - \ln : (x - 1) = 2\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} \cdots\right],$$

$$\ln : x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + {}^1/_3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + {}^1/_5\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \cdots\right],$$

$$\ln : (x + y) - \ln : x = 2\left[\frac{y}{2x+y} + {}^1/_3\left(\frac{y}{2x+y}\right)^3 + {}^1/_5\left(\frac{y}{2x+y}\right)^5 \cdots\right].$$

$$\log.^a x = \ln : x \frac{1}{\ln : a},$$

wenn a die Basis des künstlichen Logarithmensystems ist.

$\frac{1}{\ln : a}$ ist der Modul M.

Für das Briggische System ist:

$$M = 0{,}4342944819$$

und:

$$\ln : 10 = 2{,}302585.$$

Goniometrische und cyclometrische Reihen.

$$\sin. x = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots,$$

$$\cos. x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots,$$

$$\text{tang.}\, x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{3 \cdot 5} + \frac{17x^7}{3^2 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{62x^9}{3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \cdots,$$

$$\text{cot.}\, x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3^2 \cdot 5} - \frac{2x^5}{3^2 \cdot 5 \cdot 7} \cdots,$$

$$\text{arc. sin.}\, x = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \cdots,$$

$$\text{arc. cos.}\, x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} - \frac{3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \cdots,$$

$$\text{arc. tang.}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots,$$

$$\text{arc. cot.}\, x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} \cdots.$$

Relationen zwischen Exponential- und trigonometrischen Funktionen.

$$\sqrt{-1} = i.$$

$$\cos.\, x \pm i \sin.\, x = e^{\pm x i},$$

$$(\cos.\, x \pm i \sin.\, x)^m = \cos.\, m x \pm i \sin.\, m x,$$
$$= e^{\pm m x i} \text{ (Moivresche Formel)},$$

$$(\cos.\, x + i \sin.\, x)(\cos.\, y + i \sin.\, y),$$
$$= \cos.\, (x + y) + i \sin.\, (x + y),$$

$$\cos.\, x = \tfrac{1}{2}(e^{xi} + e^{-xi}),$$

$$\sin.\, x = \tfrac{1}{2}\left(\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{i}\right),$$

$$x = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + i \,\text{tang.}\, x}{1 - i \,\text{tang.}\, x}.$$

Geometrische Progression.

Bedeutet t das n^te^ Glied und s die Summe aller Glieder bis dahin, so ist, wenn:

$$a, a\,b, a\,b^2, a\,b^3 \cdots a\,b^{n-1}$$

die Reihe ist:

$$t = a\,b^{n-1},$$

$$s = a\left(\frac{b^n - 1}{b - 1}\right),$$

$$s = \frac{b\,t - a}{b - 1},$$

$$s = \frac{t\,(b^n - 1)}{b^{n-1}(b-1)} = \frac{\sqrt[n-1]{t^n} - \sqrt[n-1]{a^n}}{\sqrt[n-1]{t} - \sqrt[n-1]{a}}.$$

Ist b ein echter Bruch und n ∞ gross, so ist $t = 0$ und

$$s = \frac{a}{1 - b}$$

Zinsesrechnung.

Es bedeute k das anfängliche Kapital,
a Prozent, die Zinsen pro Jahr,
so ist nach n Jahren der Werth W des Kapitals:

$$W = \left(1 + \frac{a}{100}\right)^n k,$$

auch ist:

$$k = \frac{W}{\left(1 + \frac{a}{100}\right)^n}.$$

Ferner ist:

$$a = 100 \left(\sqrt[n]{\frac{W}{k}} - 1 \right),$$

$$n = \frac{\log. W - \log. k}{\log. \left(1 + \frac{a}{100}\right)}.$$

Rentenrechnung.

Wenn K am Ende jeden Jahres um die stets gleichbleibende Summe S vermehrt oder vermindert wird, so ist der Werth desselben nach n Jahren:

$$W = \left(1 + \frac{a}{100}\right)^n k \pm \left[\left(1 + \frac{a}{100}\right)^n - 1\right] \frac{100}{a} S.$$

W ist kleiner als K, wenn:

$$- S > \frac{a}{100} k,$$

W ist = Null, wenn:

$$\frac{S}{K} = \frac{a}{100} \cdot \frac{\left(1 + \frac{a}{100}\right)^n}{\left(1 + \frac{a}{100}\right)^n - 1}$$

ist. In diesem Falle ist:

$$n = \frac{\log. S - \log. \left(S - \frac{a}{100} K\right)}{\log. \left(1 + \frac{a}{100}\right)}.$$

Arithmetische Progression.

t bedeute das n^{te} Glied, s die Summe, so ist, wenn:

$$\underset{1}{a},\ \underset{2}{a+d},\ \underset{3}{a+2d},\ \underset{4}{a+3d} \cdots \underset{n}{a+(n-1)d}$$

die Reihe ist:

$$t = a + (n-1)d;\quad s = \frac{a+t}{2} \cdot n.$$

Auch hat man:

$$s = \left(a + \frac{(n-1)d}{2}\right)n = \left(t - \frac{(n-1)d}{2}\right)n$$

$$= \frac{a+t}{2} \cdot \left(\frac{t-a}{d} + 1\right).$$

Höhere arithmetische Reihe.

Ist:
$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4 \cdots a_n$$

eine höhere arithmetische Reihe:

$b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4 \cdots b_n$ ihre erste,
$c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4 \cdots c_n$ ihre zweite,
$d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4 \cdots d_n$ ihre dritte

Differenzreihe, ist also:

$$b_1 = a_2 - a_1,\ b_2 = a_3 - a_2,\ c_1 = b_2 - b_1,\ d_1 = c_2 - c_1$$

u. s. w., so hat man das allgemeine Glied der Hauptreihe

I. $$a_n = a_1 + (n-1)b_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} c_1 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d_1 + \cdots,$$

dagegen die Summe aller Glieder der Hauptreihe bis zum n^{ten} oder allgemeinen Gliede, das sogenannte summatorische Glied:

$$\text{II.}\quad S_n = n\,a_1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\,b_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,c_1 + .$$

Bei einer arithmetischen Reihe der zweiten Ordnung ist:

$$c_1 = c_2 = c_3 \cdots,$$

also:

$$d_1 = 0 \text{ u. s. w.},$$

daher ist für sie:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,b_1 + \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)\,c_1,$$

$$S_n = na_1 + \tfrac{1}{2}\,n(n-1)\,b_1 + \tfrac{1}{6}\,n(n-1)(n-2)\,c_1.$$

Die Reihen der sogenannten Polygonalzahlen sind

Zahlen des Dreieckes: 1, 3, 6, 10, 15 • • •,
„ Viereckes: 1, 4, 9, 16, 25 • • •,
„ Fünfeckes: 1, 5, 12, 22, 35 u. s. w.

Es ist demnach das allgemeine Glied der Dreieckszahlen:

$$a_n = 1 + 2(n-1) + \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) = \frac{n(n+1)}{2},$$

und das summatorische Glied:

$$S_n = n + n(n-1) + \tfrac{1}{6}n(n-1)(n-2) = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Für die Viereckszahlen ist:

$$a_1 = 1,\ b_1 = 4 - 1 = 3$$

und:

$$c_1 = 5 - 3 = 2,$$

daher: $a_n = 1 + 3(n-1) + (n-1)(n-2) = n^2,$

$$S_n = n + \tfrac{3}{2}\,n(n-1) + \tfrac{1}{3}\,n(n-1)(n-2)$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Beispiel. Die höhere arithmetische Reihe

$$2\ ,\ 10\ ,\ 30\ ,\ 68\ ,\ 130\ ,\ 222 \cdots$$

hat folgende Differenzreihen:

$$8\ ,\ 20\ ,\ 38\ ,\ 62\ ,\ 92$$
$$12\ ,\ 18\ ,\ 24\ ,\ 30$$
$$6\ ,\ 6\ ,\ 6$$
$$0\ ,\ 0$$
$$0$$

Für sie ist daher:

$$a_1 = 2,\ b_1 = 8,\ c_1 = 12,\ d_1 = 6,\ e_1 = 0;$$

daher das allgemeine Glied:

$$a_n = 2 + 8\,(n-1) + {}^{12}/_{2}\,(n-1)\,(n-2) + {}^{6}/_{6}\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3) + 0 \cdots,$$
$$= 2 + 8\,n - 8 + 6\,n^2 - 18\,n + 12 + n^3 - 6\,n^2 + 11\,n - 6 = n + n^3 = n\,(n^2+1),$$

das summatorische Glied:

$$S_n = 2\,n + 4\,n\,(n-1) + 2\,n\,(n-1)\,(n-2) + {}^{1}/_{4}\,n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3) = {}^{1}/_{4}\,n\,(2 + 3\,n + 2\,n^2 + n^3)$$
$$= {}^{1}/_{4}\,n\,(n+1)\,(n^2+n+2).$$

Nach diesen Formeln ist z. B. das zehnte Glied der Hauptreihe:

$$a_{10} = 10\,(10^2+1) = 10 \times 101 = 1010,$$

und die Summe der ersten zehn Glieder:

$$S_{10} = {}^{1}/_{4} \times 10 \times 11\,(100 + 10 + 2) = 55 \times 56 = 3080.$$

Potenzenreihen.

Bedeutet $\Sigma(n)$ die Summe der natürlichen Zahlen $(1, 2, 3, 4 \cdots n)$ von 1 bis n, ferner $\Sigma(n^2)$ die Summe

$(1^2, 2^2, 3^2, 4^2 \cdots n^2)$ ihrer Quadrate, $\Sigma(n^3)$ die Summe $(1^3, 2^3, 3^3, 4^3 \cdots n^3)$ ihrer Cuben u. s. w., so hat man:

$$\text{I.}\quad \Sigma(n) = {}^1/_2\, n^2 + {}^1/_2\, n,$$
$$\text{II.}\quad \Sigma(n^2) = {}^1/_3\, n^3 + {}^1/_2\, n^2 + {}^1/_6\, n,$$
$$\text{III.}\quad \Sigma(n^3) = {}^1/_4\, n^4 + {}^1/_2\, n^3 + {}^1/_4\, n^2,$$
$$\text{IV.}\quad \Sigma(n^4) = {}^1/_5\, n^5 + {}^1/_2\, n^4 + {}^1/_3\, n^3 - {}^1/_{30}\, n,$$
$$\text{V.}\quad \Sigma(n^5) = {}^1/_6\, n^6 + {}^1/_2\, n^5 + {}^5/_{12}\, n^4 - {}^1/_{12}\, n^2,$$
$$\text{VI.}\quad \Sigma(n^6) = {}^1/_7\, n^7 + {}^1/_2\, n^6 + {}^1/_2\, n^5 - {}^1/_6\, n^3 + {}^1/_{42}\, n.$$

Ist n eine unendliche oder sehr grosse Zahl, so hat man allgemein:

$$\text{VII.}\qquad \Sigma(n^m) = \frac{n^{m+1}}{m+1}.$$

Daher:

$$\Sigma n = {}^1/_2\, n^2,$$
$$\Sigma n^2 = {}^1/_3\, n^3,$$
$$\Sigma n^3 = {}^1/_4\, n^4,$$
$$\Sigma n^4 = {}^1/_5\, n^5,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots$$
$$\Sigma n^{1/2} = {}^2/_3\, n^{3/2},$$
$$\Sigma n^{3/2} = {}^2/_5\, n^{5/2},$$
$$\Sigma n^{2/3} = {}^3/_5\, n^{5/3},$$

Die Reihe:

$$a_n = a_0 + (n-1)\, b_0 + {}^1/_2\, (n-1)(n-2)\, e_0 + \cdots$$

dient auch zum Einschalten eines Gliedes a_n einer gegebenen Reihe:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4 \cdots,$$

deren Differenz-Reihen:

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4 \cdots \text{ und}$$
$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4 \text{ sind.}$$

Combinationen.

I. Permutationen von n Element $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots n$.

Ist ein Element g mal, das andere r mal wiederholt, so sind:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots g \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots r}$$

Permutationsformen.

II. Anzahl der Variationen für n Elemente zu k^{ter} Klasse:

$$\overset{k}{\nu} = n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \cdot n - k + 1.$$

Bei unbedingter Wiederholbarkeit der Elemente ist:

$$\overset{k}{\nu} = n^k.$$

III. Anzahl der Combinationen von n Elementen zu k^{ter} Klasse:

$$\overset{k}{c} = \frac{\overset{k}{\nu}}{\underset{p}{k}} = \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \cdots n - k + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k},$$

bei unbedingter Wiederholung der Elemente:

$$\overset{k}{c} = \frac{n \cdot n + 1 \cdot n + 2 \cdot n + 3 \cdots n + k - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots k}.$$

Dieses ist zugleich der Ausdruck der figurirten Zahlen des n^{ten} Gliedes der k^{ten} Klasse.

IV. Sollen n Elemente in zwei Abtheilungen a und b zerlegt werden, (auf jede mögliche Weise), deren eine k, die andere $n - k = r$ Elemente enthält, so ist die Anzahl der Zerlegungen für:

$$a = \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdots n + k - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k},$$

für:

$$b = \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n + r - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r}.$$

Für drei Abtheilungen, von denen a, k Elemente, b, r, c, s Elemente enthalten soll, ist:

$$\overset{k}{c}_n \times \overset{r}{c}_{n-k} = \overset{k}{c}_n \times \overset{s}{c}_{n-k} = \overset{r}{c}_n \times \overset{k}{c}_{n-r} \text{ u. s. w.}$$

Cyclische Funktionen.

Es ist:

$$(1 + z)^x = 1 + A x + \frac{A^2}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{A^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \frac{A^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4,$$

$$A = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} \cdots,$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdots.$$

x sei = log. y, so ist, wenn a die Basis des Systems bedeutet, $a^x = y$ und:

$$(1 + a - 1)^{nx} = [1 + (y - 1)],$$

nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt, gibt dieses:

$$1 + n x (a - 1) + \frac{n x (n x - 1)}{1 \cdot 2} (a - 1)^2 + \frac{n x \cdot (n x - 1)(n x - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (a - 1)^3 \cdots,$$

$$= 1 + n (y - 1) + \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2} (y - 1)^2 + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} (y - 1)^3 \cdots,$$

auf beiden Seiten 1 subtrahirt und mit n dividirt, gibt:

$$x(a-1) + \frac{x(nx-1)}{1 \cdot 2}(a-1)^2 + \frac{x(nx-1)(nx-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(a-1)^3 \cdots,$$

$$= (y-1) + \frac{n-1}{1 \cdot 2}(y-1)^2 + \frac{\cdot\, n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}(y-1)^3.$$

$n = o$ gesetzt, gibt

$$x\left[(a-1) - \tfrac{1}{2}(a-1)^2 + \tfrac{1}{3}(a-1)^3 - \tfrac{1}{4}(a-1)^4 \cdots\right]$$

$$= A\,x = (y-1) - \tfrac{1}{2}(y-1)^2 + \tfrac{1}{3}(y-1)^3 - \tfrac{1}{4}(y-1)^4.$$

$$x = \frac{1}{A}\left[(y-1) - \tfrac{1}{2}(y-1)^2 + \tfrac{1}{3}(y-1)^3 - \tfrac{1}{4}(y-1)^4\right]$$

$$= \log.\, y,$$

$$\log.\,(1+y) = \frac{1}{A}\left(y - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{4}y^4 \cdots\right)$$

für $A = 1$ $\log.\,\text{nat.}\,(1+y) = y - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{4}y^4.$

Setzt man statt e^x:

$$e^{x \cdot i} = e^{x \cdot \sqrt{-1}},$$

so entsteht durch Sonderung der immaginären Glieder:

$$e^{x \cdot i} = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{x^6}{1 \cdots 6} \cdots$$

$$+ \left(x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdots 5} - \frac{x^7}{1 \cdots 7}\right) \cdot i$$

I. $\quad e^{x \cdot i} = \cos.\, x + \sin.\, x \cdot i,$

II. $\quad e^{-x \cdot i} = \cos.\, x - \sin.\,(x)\, i,$

und wenn man $x = n \cdot z$ setzt:

$$e^{(nz)i} = \cos.\, n \cdot z + \sin.\,(n\,z) \cdot i,$$

$$e^{n(z \cdot i)} = (\cos.\, z + \sin.\, z \cdot i)^n,$$

also:

III. $\quad (\cos.\, z + \sin.\, z \cdot i)^n = \cos.\, n\,z + \sin.\,(n\,z) \cdot i,$

durch Addition und Subtraktion von I und II entsteht:

IV.
$$\cos. x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2},$$

V.
$$\sin. x = \frac{e^{x.i} - e^{-x.i}}{2i}.$$

Durch Multiplikation von I und II:

VI.
$$1 = \cos. x^2 + \sin. x^2.$$

Um den Werth von x in Funktion seines sin. oder cos. auszudrücken:

$$(\text{arc. } x = \text{Funktion } \sin. x),$$

ist aus I und II:

$$x \cdot i = \log. \text{nat.} (\cos. x + \sin. x \cdot i),$$

$$-x \cdot i = \log. \text{nat.} (\cos. x - \sin. x\, i).$$

Hieraus durch Subtraktion, wenn log. nat. kurz durch log. bezeichnet wird:

VII.
$$x = \frac{1}{2i} \log. \left(\frac{\cos. x + \sin. x \cdot i}{\cos. x - \sin. x \cdot i} \right),$$

mit cos. x den Bruch gehoben, gibt:

VIII.
$$x = \frac{1}{2i} \log. \left(\frac{1 + \text{tang.}\, x \cdot i}{1 - \text{tang.}\, x \cdot i} \right).$$

Da nun:

$$\log. \frac{1+z}{1-z} = 2 \left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} \cdots \right),$$

so ist, wenn man VIII hiernach entwickelt:

IX.
$$x = \frac{1}{2i} \cdot 2i \left(\text{tang.}\, x - \frac{\text{tang.}\, x^3}{3} + \frac{\text{tang.}\, x^5}{5} - \cdots \right).$$

Wird hierin tang. $x = 1$ gesetzt, so ist:

X. $\quad {}^1/_4\,\pi = 1 - {}^1/_3 + {}^1/_5 - {}^1/_7 \cdots$

Leibnitz'sche Reihe. Andere besser convergirende Reihen für π sind:

$$\text{tang. } 30^0 = \frac{\pi}{6}, \text{ ist gleich } {}^1/_3 \sqrt{3},$$

also nach gehöriger Operation:

XI. $$\frac{\pi}{6} = {}^1/_3 \sqrt{3} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{9 \cdot 3^4}\right).$$

XII. $$\pi = 2 \sqrt{\cdot 3} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} \cdots\right).$$

Zur Vermeidung der $\sqrt{}$ Grösse kann man $\frac{\pi}{4}$ in zwei Bogen zerlegen, deren tang. rational.

Es ist:
$$\text{tang. } \alpha + \beta = \frac{\text{tang. } \alpha \cdot \text{tang. } \beta}{1 - \text{tang. } \alpha \cdot \text{tang. } \beta};$$

setzt man:
$$\text{tang. } \alpha = {}^1/_2,$$
$$\text{tang. } \beta = {}^1/_3,$$

so ist:
$$\text{tang. } \alpha + \beta = \frac{{}^1/_2 + {}^1/_3}{1 - {}^1/_2 \cdot {}^1/_3} = 1,$$

also:
$$\alpha + \beta = {}^1/_4\,\pi.$$

Nach IX kann man setzen:

$x = \text{tang. } x\,(1 - {}^1/_3 \log. x^2 + {}^1/_5 \text{ tang. } x^4 - \cdots).$

Also:

$$\alpha = {}^1/_2 \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^4} - \frac{1}{7 \cdot 2^6} + \frac{1}{9 \cdot 2^8} - \right),$$

$$\beta = {}^1/_3 \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \frac{1}{5 \cdot 3^4} - \frac{1}{7 \cdot 3^6} + \frac{1}{9 \cdot 3^8}\right),$$

also:
$$\alpha + \beta = {}^1/_4\,\pi \text{ und}$$

XIII.

$$\pi = 2\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^4} - \frac{1}{7 \cdot 2^6} + \frac{1}{9 \cdot 2^8} \cdots\right),$$

$$+ \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^4} - \frac{1}{7 \cdot 2^6} + \frac{1}{9 \cdot 2^8} \cdots\right).$$

(Eyler'sche Entwickelung.)

Maohin'sche Entwickelung.

Derselbe setzt:

$^1/_4\,\pi = 4\,\alpha - \beta$ wobei tang. $\alpha = {}^1/_5$, tang. $\beta = {}^1/_{289}$ ist.

$$\text{tang. } 2\,\alpha = \frac{2 \text{ tang. } \alpha}{1 - \text{tang. } \alpha^2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12}.$$

I. $$\text{tang. } 4\,\alpha = \frac{2 \cdot \frac{5}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119},$$

mithin etwas grösser als 1, folglich auch:

$$\text{tang. } 4\,\alpha > \text{tang. } {}^1/_4\,\pi,$$

also: $$4\,\alpha > {}^1/_4\,\pi,$$

daher sei: $${}^1/_4\,\pi = 4\,\alpha - \beta,$$

so hat man:

$$1 = \text{tang. } (4\,\alpha - \beta) = \frac{\text{tang. } 4\,\alpha - \text{tang. } \beta}{1 + \text{tang. } 4\,\alpha \text{ tang. } \beta}.$$

Hieraus:

$$\text{II. tang. } \beta = \frac{\text{tang. } 4\alpha - 1}{\text{tang. } 4\alpha + 1} = \frac{\frac{120}{119} - 1}{\frac{120}{119} + 1} = \frac{1}{239}.$$

Wenn man nun α und β entwickelt, so ist:

III.
$$\alpha = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 5^2} + \frac{1}{5 \cdot 5^4} - \frac{1}{7 \cdot 5^6} \cdots\right),$$
$$\beta = \frac{1}{239}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 239^2} + \frac{1}{5 \cdot 239^4} \cdots\right).$$

Da nun: $\quad {}^1\!/_4\, \pi = 4\alpha - \beta,$

so ist:

IV.
$$\pi = 4 \cdot \begin{cases} \frac{4}{5}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 5^2} + \frac{1}{5 \cdot 5^4} - \frac{1}{7 \cdot 5^6} + \cdots\right), \\ -\frac{1}{239}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 239^2} + \frac{1}{5 \cdot 239^4} \right. \\ \qquad \left. - \frac{1}{7 \cdot 239^6} \cdots\right), \end{cases}$$

oder was dasselbe ist:

V.
$$\pi = 4 \cdot \begin{cases} \frac{4}{5}\left(1 - \frac{4}{3 \cdot 100} + \frac{4^2}{5 \cdot 100^2} \right. \\ \qquad \left. - \frac{4^3}{7 \cdot 100^3} + \cdots\right), \\ -\frac{1}{239}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 57121} + \frac{1}{5 \cdot 57121^2} \right. \\ \qquad \left. - \frac{1}{7 \cdot 57121^3} + \cdots\right). \end{cases}$$

Vega hat bei der Berechnung:

$$\tfrac{1}{4}\pi = 5 \text{ arc. tang. } \tfrac{1}{7} + 2 \text{ arc. tang. } \tfrac{3}{79}$$

gesetzt. Zur Prüfung setzte er:

$$\tfrac{1}{4}\pi = \text{arc. tang. } \tfrac{1}{7} + 2 \text{ arc. tang. } \tfrac{1}{8}.$$

Hyberbolische Funktionen.

Zerlegt man e^x in die beiden Reihen:

$$1 + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^6}{1 \cdots 6} + \frac{x^8}{1 \cdots 8} = \cos. x,$$

$$x + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdots 5} + \frac{x^7}{1 \cdots 7} + \frac{x^9}{1 \cdots 9} = \sin. x,$$

so ist:

I. $e^x = \cos. x + \sin. x,$

II. $e^{-x} = \cos. x - \sin. x,$

III. $(\cos. z + \sin. z)^n = \cos. n z + \sin. n \cdot z$

durch Addition und Subtraktion von I und II

IV. $$\cos. x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

V. $$\sin. x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

durch Multiplikation von I und II

VI. $1 = \cos. x^2 - \sin. x^2.$

Diese Gleichung stellt die Coordinaten-Gleichung einer gleichseitigen auf den Mittelpunkt bezogenen Hyperbel vor, daher die Benennung, ebenso wie bei den cyklischen Funktionen.

Will man den Werth von x durch einen hyperbolischen sin. oder cos. ausdrücken, so hat man durch Subtraktion von I und II

$$x = \log.(\cos. x + \sin. x)$$

$$-x = \log.(\cos. x - \sin. x)$$

VII. $$x = \tfrac{1}{2} \log.\left(\frac{\cos. x + \sin. x}{\cos. x - \sin. x}\right),$$

mit cos. x gehoben:

VIII. $$x = \tfrac{1}{2} \log.\left(\frac{1 + \text{tang. } x}{1 - \text{tang. } x}\right)$$

und entwickelt:

IX. $$x = \text{tang.} x + \frac{\text{tang. } x^3}{3} + \frac{\text{tang. } x^5}{5} + \frac{\text{tang. } x^7}{7},$$

X. $$x = \text{tang.} x\left(1 + \frac{\text{tang. } x^2}{3} + \frac{\text{tang. } x^4}{5} + \frac{\text{tang. } x^6}{7} \cdots\right).$$

Methode der unbestimmten Koëffizienten,

an einigen Beispielen erläutert.

1. Beispiel. Es soll:

$$\frac{a + b x^2}{c + d x}$$

in einer Reihe nach den Potenzen von x entwickelt werden.

I. $$\frac{a + b x^2}{c + d x} = A + B x + C x^2 + D x^3 + \cdots,$$

$$a + b x^2 = c A + c B x + c C x^2 + c D x^3$$
$$\qquad d A x + d B x^2 + d C x^3,$$

also:

$$0 = \begin{array}{r|r|r|r} cA & +cB & x + cC & x^2 + cD \\ -a & +dA & x + dB & x^2 + dC \\ & & -b & x^2 \end{array} \begin{array}{l} x^3 \\ x^3 \\ \ \end{array}$$

Soll nun die linke Seite für einen reellen Werth von $x =$ Null werden, so müssen sämmtliche Koëffizienten $= 0$ sein, daher:

$$c A - a = 0, \text{ also } A = \frac{a}{c},$$

$$d A + c B = 0, \quad „ \quad B = \frac{a d}{c^2},$$

$$c C + d B - b = 0, \quad „ \quad C = \frac{b c^2 + a d^2}{c^3},$$

$$c D + d C = 0, \quad „ \quad D = \frac{d (b c^2 + a d^2)}{c^4}.$$

Substituirt man diese Werthe in der Gleichung I, so hat man die verlangte Entwickelung.

2. Beispiel. y sei $= f(x)$, so kann man auch x als eine Funktion von y betrachten und $x = f y$ setzen.

Es sei:

$$\text{I. } y = x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdots 7} + \cdots$$

Man setze:

$$\text{II.} \qquad x = A + B y + C y^2 + D y^3 \cdots$$

Da in I. für $x = 0$ auch $y = 0$ wird, so muss auch $A = 0$, sein; für $x = -x$ wird y auch $= -y$. Da sich die Zeichen der rechten Seite alle umkehren, so können in der gesuchten Entwickelung nur ungerade Potenzen vorkommen und es fällt die gesuchte Reihe unter die spezielle Form.

$$\text{III.} \qquad x = a y + b y^3 + c y^5 + d y^7 \cdots.$$

Substituirt man diesen Werth von x in die Gleichung I und bringt y auf die rechte Seite, wodurch die Gleichung auf 0 gebracht wird, so kommt:

$$\begin{array}{r|l|l|l|l}
0 = a & y + b & y^3 + c & y^5 + d & y^7 \\
-1 & \quad - {}^1/_6\, a^3 & \quad - {}^1/_2\, a^2 b & \quad - {}^1/_2\, a^2 c & \\
 & & \quad + {}^1/_{120}\, a^5 & \quad - {}^1/_2\, a b^2 & \\
 & & & \quad + {}^1/_{24}\, a^4 b & \\
 & & & \quad - {}^1/_{5040}\, a^7 &
\end{array}$$

Es ist also:

$a - 1 = 0$, also $a - 1$,

$b - {}^1/_6\, a^3 = 0$, also $b = \frac{1}{2 \cdot 3}$,

$c - {}^1/_2\, a^2 b + {}^1/_{120} = 0$ also $c = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}$,

$d - {}^1/_2\, a^2 c - {}^1/_2\, a b^2 + {}^1/_{24}\, a^4 b - {}^1/_{5040}\, a^7 = 0$,

also:

$$d = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}$$

durch Substitution.

IV. $$x = y + \frac{1}{2 \cdot 3} y^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} y^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} y^7 \ldots.$$

Die Reihe I war die Entwickelung von sin. x, also die Reihe IV die Entwickelung von arc. x = sin. = y, d. h. die Entwickelung des zum sin. = y gehörigen Bogens.

3. Beispiel.

$$y \text{ sei} = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \ldots.$$

Es ist zu finden: $x = f(y)$,

Die zu suchende Reihe kann nicht nach den Potenzen von y fortschreiten, weil y nicht = f x, sondern:

$$y - 1 = f(x),$$

daher kann auch nur gesucht werden:

$$x = f(y - 1).$$

Ist nun:

$$\text{I. } z = y - 1 = x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdots,$$

so ist:

$$\text{II.} \qquad x = a\,z + b\,z^2 + c\,z^3 + d\,z^4.$$

II und 1 substituirt und das vorige Verfahren aus Beispiel 2 angewendet gibt:

$$\text{III.} \qquad x = z - {}^1/_2\, z^2 + {}^1/_3\, z^3 - {}^1/_4\, z^4 \cdots,$$

$$\text{IV.} \qquad x = y - 1 - {}^1/_2\,(y-1)^2 + {}^1/_3\,(y-1)^3 - {}^1/_4\,(y-1)^4 \cdots.$$

In der oben angeführten Reihe erkennt man leicht die Entwickelung von e^x, also:

$$y = e^x = f(x),$$

und da $\qquad x \text{ nach III} = f\,z = f\,(e^x - 1),$

so ist die obige Reihe als eine Entwickelung der Potenz y^1 anzusehen. Dann ist x der Modul, also:

$$-1 + y = f\,\text{Modul} = f\,z = f\,(y - 1) = f\,x$$

und da $\qquad x = f\,z = f\,(y - 1).$

4. **Beispiel.** Entwickelung von a^x:

$$a^x = (1 + a - 1)^{n \cdot \frac{x}{n}},$$

nach dem binomischen Lehrsatze:

$$[1 + (a-1)]^n = 1 + n\,(a-1) + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2}\,(a-1)^2 + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,(a-1)^3 +,$$

nach Potenzen von n geordnet:

$[1+(a-1)]^n$			
$= 1 + (a-1)$	$n + {}^1/_2\,(a-1)^2$	$n^2 + {}^1/_6\,(a-1)^3$	n^3
$- {}^1/_2\,(a-1)^2$	$- {}^1/_2\,(a-1)^3$	$- {}^1/_4\,(a-1)^4$	
$+ {}^1/_3\,(a-1)^3$	$+ {}^{11}/_{24}(a-1)^4$	etc.	
$- {}^1/_4\,(a-1)^4$	etc.		
+ etc. oder:			
$[1+(a-1)]^n$			
$= 1 + \quad A$	$n \quad + \quad B$	$n^2 \quad + \quad C$	n^3

so ist:

$$A = (a-1) - {}^1/_2\,(a-1)^2 + {}^1/_3\,(a-1)^3 - {}^1/_4\,(a-1)^4 + .$$

Erhebt man die Gleichung:

$$[1+(a-1)]^n = 1 + A\,n + B\,n^2 + C\,n^3$$

auf beiden Seiten zur Potenz $\frac{x}{12}$, so ist:

$$[1+(a-1)]^n = 1 + n\,(A + B\,n + C\,n \cdot \cdot \cdot)^2,$$

und wenn:
$$B\,n + C\,n^2 \cdot \cdot \cdot = z$$
gesetzt wird, so ist:

$$[1+(a-1)]^n = 1 + n\,(A+z)$$

und:

$$[1+(a-1)]^{n \cdot \frac{x}{n}} = a^x = 1 + \frac{x}{n} \cdot n\,(A+z)$$

$$+ \frac{\frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n} - 1}{1 \cdot 2}\, n^2\,(A+z)^2 + \frac{\frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n} - 1 \cdot \frac{x}{n} - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}\, n^3\,(A+z)^3 \cdot \cdot \cdot,$$

oder:

$$a^x = 1 + x\,(A+z) + \frac{x\,(x-n)}{1 \cdot 2}\,(A+z)^2 + \frac{x\,(x-n)\,(x-2\,n)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,(A+z)^3 \cdot \cdot \cdot$$

n ist eine von x unabhängige Grösse, kann daher = 0 gesetzt werden, dann wird auch z = 0, und:

$$a^x = 1 + A\,x + \frac{A^2}{1 \cdot 2}\,x^2 + \frac{A^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,x^3 \cdots.$$

Wird A = 1 und x = 1 gesetzt, so hat man:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdots$$

als Basis des natürlichen logarithmischen Systems:

$$= 2{,}718281828459,$$

dessen Modul = 1 ist.

5. Beispiel. Entwickelung des sin. und cosinus. Die Reihe für sinus x muss von der Form sein:

$$\text{I.} \qquad \sin. x = a\,x + b\,x^3 + c\,x^5 \cdots,$$

weil der sin. für x = 0 auch gleich 0 wird, und der sin. für — x auch = — wird, daher nur ungerade Potenzen.

$$\text{II.} \qquad \cos. x = 1 + a'\,x^2 + b'\,x^4 + c'\,x^6$$

aus ähnlichen Gründen.

Wenn x unendlich klein ist, so ist:

$$\sin. x = x$$

und:

$$\sin. x = a\,x, \text{ also } \frac{\sin. x}{x} = a = 1.$$

Demnach ist der erste Koëffizient a bekannt.

Man hat also die speziellen Formen:

$$\text{III.} \qquad \sin. x = x + b\,x^3 + c\,x^5 + d\,x\,7 \cdots,$$

$$\text{IV.} \qquad \cos. x = 1 + a'x^2 + b'x^4 + c'x^6 \cdots$$

Es ist: $1 = \sin. x^2 + \cos. x^2,$

$$^1/_2 \sin. 2x = \sin. x \cdot \cos. x.$$

III und IV quadrirt und auf 0 gebracht, gibt:

$$\text{V.}\quad 0 = \left\{\begin{array}{l} 1 \\ +2a' \end{array}\right| \begin{array}{l} x^2 + 2b \\ \quad + 2b' \\ \quad + a'^2 \end{array} \left| \begin{array}{l} x^4 + 2c \\ \quad + \;\; b^2 \\ \quad + 2c' \\ \quad + 2a'b' \end{array} \right| \begin{array}{l} x^6 + 2d \\ \quad + 2bc \\ \quad + 2d' \\ \quad + 2a'c' \\ \quad + \;\; {}'b^2 \end{array} \left| \; x^8 \right.$$

III und IV multiplizirt:

$$\text{VI.}\quad {}^1/_2 \sin. 2x = x + \begin{array}{l} b \\ + a' \end{array} \left| \begin{array}{l} x^3 + c \\ \quad + a'b \\ \quad + b' \end{array} \right| \begin{array}{l} x^5 + d \\ \quad + a'c \\ \quad + b'b \\ \quad + c' \end{array} \left| \; x^7 \right.$$

Setzt man in III statt x, 2x, so hat man:

$$\text{VII.}\quad {}^1/_2 \sin. 2x = x + 4bx^3 + 16cx^5 + 64dx^7 \cdots$$

In V müssen die Koëffizienten alle $= 0$ sein; in VI und VII müssen die mit gleichen Potenzen verbundenen einander gleich sein.

Es ist also:

$$2a' + 1 = 0, \text{ folglich } a' = -{}^1/_2,$$

$$b + a' = 4b, \quad „ \quad b = -\frac{1}{2 \cdot 3},$$

$$2b + 2b' + a'^2 = 0, \text{ folglich } b' = +\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4},$$

$$c + a'b + b' = 16c, \text{ folglich } c = +\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5},$$

$$2c + b^2 + 2c' + 2a'b' = 0, \text{ folgl. } c' = -\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6},$$

$$d + a' c + b' b + c' = 64\,d, \text{folgl. } d = -\frac{1}{2 \cdots 7},$$

$$2\,d + 2\,b\,c + 2\,d' + 2\,a'\,c' + b'^2 = 0, \text{ folglich } d' = + \frac{1}{2 \cdots 8} \text{ etc.}$$

Formel aus der Differenzial-Rechnung.

Entwickelung der Taylor'schen Reihe.

Man sucht eine Entwickelung von f (k) + i nach den Potenzen von i. Die eingeklammerte Grösse bedeute stets die variable, die andere die constante. Man setze und entwickele:

$$f(x) + k + i = a + b(k + i) + c(k + i)^2 + d(k + i)^3 \cdots =$$

	i	i^2	i^3	i^4
a	b	c	d	e
$b\,k$	$2\,c\,k$	$3\,d\,k$	$4\,e\,k$	$5\,f\,k$
$c\,k^2$	$3\,d\,k^2$	$6\,e\,k^2$	$10\,f\,k^2$	$15\,g\,k^2$
$d\,k^3$	$4\,e\,k^3$	$10\,f\,k^3$	$20\,g\,k^3$	$\cdots$
$e\,k^4$	$5\,f\,k^4$	$15\,g\,k^4$	$\cdots$	$\cdots$
$f\,k^5$	$6\,g\,k^5$	$\cdots$	$\cdots$	
$g\,k^6$	$\cdots$	$\cdots$		
$\cdots$	$\cdots$			
$\cdots$				
I.	II.	III.	IV.	V.

Ferner ist: $i\,f(x + k) + i$

$$= A + B\,i + C\,i^2 + D\,i^3 \cdots$$

Also: A = Summa der Reihe I,
B = „ „ „ II u. s. w.

Hieraus ergibt sich, dass die Koëffizienten A B ⋯ a b ⋯ nur von der variabeln Grösse abhängen. Daher

wird A für alle möglichen Werthe von i stets gleich bleiben. Setzt man also $i = 0$, so findet man:

$$A = f(x + k)$$

und:

$$a = f(x).$$

Um nun die andern Koëffizienten zu finden, differenzire man die Reihen I, II, III u. s. w., so kommt, wenn man statt der Summe der Reihen die Buchstaben A, B, C u. s. w. schreibt:

$$\frac{dA}{dk} = b + 2ck + 3dk^2 + 4ek^3 \cdots = 1B,$$

$$\frac{dB}{dk} = 2c + 6dk + 12ck^2 \cdots = 2C,$$

$$\frac{dC}{dk} = 3d + 12ek + 30fk \cdots = 3D,$$

$$\frac{dD}{dk} = 4e + 20fk + 60gk^2 \cdots = 4E,$$

Setzt man $x = 0$ und bezeichnet die Differenzialquotienten von fk mit $\triangle k$, $\triangle^2 k$, u. s. w., so hat man:

$$A = f(k) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad fk$$

$$B = \frac{d^1 fk}{dk} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \triangle k,$$

$$C = \frac{dB}{2dk} = \frac{d^2 fk}{1 \cdot 2 dk^2} \quad \ldots \quad \frac{\triangle^2 k}{1 \cdot 2},$$

$$D = \frac{dC}{3dk} = \frac{d^3 fk}{1 \cdot 2 \cdot 3 dk^3} \quad \ldots \quad \frac{\triangle^3 k}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$E = \frac{dD}{4dk} = \frac{d^4 fk}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 dk^4} \quad \ldots \quad \frac{\triangle^4 k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Also:

$$f k + i = f k + \frac{\Delta k \cdot i}{1} + \frac{\Delta^2 k \cdot i^2}{1 \cdot 2} + \frac{\Delta^3 k \cdot i^3}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

oder anstatt k, x gesetzt:

$$f x + i = f x + \frac{d f z}{d i} i + \frac{d^2 f x}{d x^2} \cdot \frac{i^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^3 f x}{d x^3} \cdot \frac{i^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \ldots$$

Setzt man $f x = f 0 + x$, so entwickelt sich hieraus sehr leicht die Maclaurin'sche Reihe.

Man hat demnach zwei Hauptreihen, die in der höheren Mathematik eine vielfache Verwendung finden, nämlich:

a) die Taylor'sche Reihe.

$$f(x + i) = f x + \frac{d f x}{d x} i + \frac{d^2 f x}{d x^2} \cdot \frac{i^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^3 f x}{d x^3} \cdot \frac{i^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \ldots$$

und wenn $f(x = 0)$ den Werth von $f x$, wenn darin $x = 0$ ist, bedeutet:

b) die Maclaurin'sche Reihe.

$$f x = f(x = 0) + \frac{d f x = 0}{d x} x + \frac{d^2 f x = 0}{d x^2} \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^3 f x = 0}{d x^3} \cdot \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

$\frac{d f x}{d x}$ heisst der Differenzialquotient oder die abgeleitete Funktion 1., 2., 3. u. s. w.

Entwickelung des sinus und cosinus.

$$\frac{d \sin. x}{d x} = \cos. x \;\Big|\; \frac{d^2 \sin. x}{d x} = \frac{d \cos. x}{d x} = -\sin. x$$

$$\frac{d^3 \sin. x}{d x^3} = -\cos. x \;\Big|\; \frac{d^4 \sin. x}{d x^4} = \sin. x \;\Big|\; \frac{d^5 \sin. x}{d x^5} = \cos. x$$

$$\frac{d^6 \sin. x}{d x^6} = -\sin. x \;\Big|\; \frac{d^7 \sin. x}{d x^7} = -\cos. x.$$

Dieses wären die sieben ersten Differenzialquotienten. Hierin $x = 0$ gesetzt und nach der Maclaurin'schen Reihe entwickelt gibt:

$$\sin. x = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdots 5} - \frac{x^7}{1 \cdots 7},$$

und auf analoge Weise:

$$\cos. x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdots 4} - \frac{x^6}{1 \cdots 6} \cdots$$

Entwickelung des Bogens x.

$$d \operatorname{tang.} x = \sec. x^2 \, d x = (1 + \operatorname{tang.} x^2) \, d x,$$

$$\operatorname{tang.} x \text{ sei } = t,$$

so ist:

$$d t = (1 + t^2) \cdot d x,$$

oder das Differenzial des Bogens:

$$= d x = d \operatorname{arc.} x = \frac{d t}{1 + t^2},$$

oder deutlicher:

$$\frac{d \operatorname{arc.} \operatorname{tang.} = t}{d t} = (1 + t^2)^{-1},$$

d. h.: $x = f \cdot t (1 + t^2)^{-1} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 \cdots$

Nun sei der 1te Differenzialquotient mit $f^1 x$ bezeichnet u. s. w., so ist:

$$f^1 x = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 - t^{10} + t^{12} \cdots,$$

$$f^2 x = -2t + 4t^3 - 6t^5 + 8t^7 \cdots, \text{ d. h.} = d f^1 x,$$

$$f^3 x = -2 + 3 \cdot 4 t^2 - 5 \cdot 6 t^4 + 7 \cdot 8 t^6 \cdots,$$

$$f^4 x = 2 \cdot 3 \cdot 4 t - 4 \cdot 5 \cdot 6 t^3 + 6 \cdot 7 \cdot 8 t^5 \cdots,$$

$$f^5 x = 2 \cdot 3 \cdot 4 - 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 t + 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 t^4 \cdots$$

Nach Maçlaurin'scher Reihe entwickelt, ist:

$$\text{arc. } x = f \cdot (t),$$

$$x = t - 2 \frac{t^3}{1 \cdots 3} + 2 \cdot 3 \cdot 4 \frac{t^5}{1 \cdots 5} \cdots,$$

$$\text{arc. } x = t - \tfrac{1}{3} t^3 + \tfrac{1}{5} t^5 - \tfrac{1}{7} t^7 + \tfrac{1}{9} t^9 \cdots,$$

Für:

$$t = 1 \text{ ist } x = \tfrac{1}{4}\pi = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} \cdots$$

Entwickelung der Binomialreihe.

$$(a + x)^n$$

sei gegeben, so ist:

$$\frac{d(a+x)^n}{dx} = n \cdot (a+x)^{n-1},$$

$$\frac{d^2(a+x)^n}{dx^2} = n \cdot n - 1 (a+x)^{n-2},$$

$$\frac{d^3(a+x)^n}{dx^3} = n \cdot n - 1 \cdot n - 2 (a+x)^{n-3},$$

$$\frac{d^4(a+x)^n}{dx^4} = n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \cdot (a+x)^{n-4}.$$

Nach der Maclaurin'schen Reihe entwickelt:

$$(a+x)^n = a^n + n \cdot a^{n-1} x + \frac{n \cdot \overline{n-1} \cdot a^{n-2} x^2}{1 \cdot 2} + \frac{n \cdot \overline{n-1} \cdot \overline{n-2} \cdot a^{n-3} x^3}{1 \cdots 3}.$$

Entwickelung der Exponentialreihe.

a^x soll entwickelt werden:

$$d(a)^x = a^{x+i} - a^x = a^x(a^i - 1) \cdot a^i = (1 + a - 1)^i,$$

also:

$$a^i = [1 + (a-1])^i = 1 + i(a-1) + \frac{i \cdot \overline{i-1}}{1 \cdot 2}(a-1)^2,$$

also:

$$a^x \cdot (a^i - 1) = a^x[i \cdot (a-1) + \frac{i \cdot \overline{i-1}}{1 \cdot 2}(a-1)^2 + \frac{i \cdot \overline{i-1} \cdot \overline{i-2}}{1 \cdots 3}(a-1)^3 \cdots],$$

$$\frac{a^{x+i} - a^x}{i} = a^x(a-1) + \frac{i-1}{2}(a-1)^2 + \frac{\overline{i-1} \cdot \overline{i-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3}(a-1)^3 \cdots$$

$i = 0$ dann ist:

$$\frac{d(a)^x}{dx} = a^x(a-1) - {}^1\!/_2 (a-1)^2 + {}^1\!/_3 (a-1)^3 - {}^1\!/_4 (a-1)^4 \cdots$$

Die Grösse zwischen der Klammer ist von a abhängig, also constant daher:

$$\frac{d(a)^x}{dx} = A \cdot a^x$$

zu setzen:

$$\frac{d^2 a^x}{d x^2} = A^2 a^x \quad \Big| \quad \frac{d^3 \cdot a^x}{d x^3} = A^3 a^x$$

u. s. w.

Nach der Maclaurin'schen Reihe entwickelt, ist:

$$a^x = 1 + A x + \frac{A^2 x^2}{1 \cdot 2} + \frac{A^3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{A^4 x^4}{1 \cdots 4} \cdots$$

und: $A = (a - 1) - \frac{1}{2}(a - 1)^2 + \frac{1}{3}(a - 1)^3 - \cdots$

A ist der Modul der Exponentialreihe. Setzt man:

$$A \text{ und } x = 1,$$

so erhält man den Beweis des natürlichen Logarithmensystems:

$$e = 2{,}71828.$$

Entwickelung der logarithmischen Reihe.

Nach dem Vorigen war:

$$\frac{d\, a^p}{d p} = a^p \left\{ (a - 1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a - 1)^3 \cdots \right\},$$
$$= a^p \cdot A.$$

Nun sei:

$$a^p = x,$$

so ist für die Basis a:

$$p = \log._a x \text{ und } d\, p = d \log._a x,$$

also:

$$\frac{d x}{d \log._a x} = x \,.\, A, \text{ also } \frac{d x}{x \cdot A} = d \log._a x.$$

I. $$d \log._a x = \frac{1}{A} \cdot \frac{d x}{x}$$

und:
$$\frac{d \log._a x}{dx} = \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{x},$$

hieraus folgt durch differenziren der 1., 2., 3. Differenzialquotient:

$$\frac{d \log._a x}{dx} = \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{x},$$
$$\frac{d^2 \log._a x}{dx^2} = -\frac{1}{A} \cdot \frac{1}{x^3},$$
$$\frac{d^3 \log._a x}{dx^3} = +\frac{1}{A} \cdot \frac{2}{x^3}.$$

$$\frac{d^4 \log._a x}{dx^4} = -\frac{1}{A} \cdot \frac{2 \cdot 3}{x^4},$$
$$\frac{d^5 \log._a x}{dx^5} = +\frac{1}{A} \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5},$$
$$\frac{d^6 \log._a x}{dx^6} = -\frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{x^6},$$

$$\text{II.} \quad \log._a x + z = \log._a x + \frac{1}{A}\left\{\frac{z}{x} - {}^1/_2 \frac{z^2}{x^2} + {}^1/_3 \frac{z^3}{x^3} - {}^1/_4 \frac{z^4}{x^4}\right\}.$$

Setzt man $x = 1$, so hat man:

$$\text{III.} \quad \log._a 1 + z = \frac{1}{A}\left\{z - {}^1/_2 z^2 + {}^1/_3 z^3 - {}^1/_4 z^4.\right\}$$

A war nach dem Vorigen der Exponentialmodul für die Basis $= a$, setzt man ihn $= 1$, so bezieht sich der log. $1 + z^1$ auf die Basis $= e$ und dann ist:

IV.
$$\log._e (1 + z) = \log.\ \text{nat.}\ 1 + z = z - {}^1/_2 z^2 + {}^1/_3 z^3 - {}^1/_4 z^4.$$

Vergleicht man IV mit der Reihe für A, so ist:

$$A = \log.\ \text{nat.}\ a,$$

und es ist also, wenn $\log_a (1+z)$ so viel heisst, als der auf die Basis a bezogene log. von $1+z$:

$$\text{V.}\qquad \log_a (1+z) = \frac{1}{\text{log. nat. } a} \cdot \text{log. nat. } 1+z.$$

Integralrechnung. Fundamentalformen.

I. Integral von $du\sqrt{(1+u^2)}$.

Man setze:

$$\sqrt{1+u^2} = z - u,$$

so ergibt sich
$$u = \frac{z^2-1}{2z},$$

also:
$$du = \frac{d\, z^2-1}{2z} = du = \frac{z^2+1}{2z^2} \cdot dz,$$

also:
$$du\sqrt{1+u^2} = \frac{(z^2+1)^2}{4z^3} \cdot dz = \tfrac{1}{4} z \cdot dz$$
$$+ \tfrac{1}{2} z^{-1} dz + \tfrac{1}{4} z^{-3} dz,$$

und nun integrirt:

$$\int du\sqrt{1+u^2} = \tfrac{1}{8} z^2 - \tfrac{1}{8} z^{-2} + \tfrac{1}{2} \log. z,$$

oder:
$$= \tfrac{1}{8}\left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z - \frac{1}{z}\right) + \tfrac{1}{2} \log. z.$$

Da nun:
$$z - u = \sqrt{1+u^2},$$
so ist:
$$z = -u + \sqrt{1+u^2}.$$

Dieses substituirt, gibt:

$$\int d\,u \sqrt{1+u^2} = {}^1\!/_8\,(2\,u \cdot 2\sqrt{1+u^2}) + {}^1\!/_2 \log.\,z,$$

und nach gehöriger Vereinfachung:

$$\int d\,u \sqrt{1+u^2} = {}^1\!/_2\,(u\sqrt{1+u^2}) + \log.\,(u + \sqrt{1+u^2}).$$

II. Integral von $d\,u\sqrt{1-u^2}$.

In der Figur 24 seien die Ordinaten der Punkte a, a' resp. x y und x' • y • b b' sei unendlich klein, also $= d\,x$; der Flächeninhalt von:

$$a\,b\,c\,d = S,$$

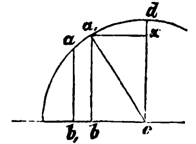
so ist:

$$d\,S = d\,x\sqrt{1-x^2},$$

oder:

$$\int d\,x\sqrt{1-x^2} = S,$$

Figur 24.



und wenn man die Abscisse anstatt mit x mit u bezeichnet, so ist:

$$\int d\,u\sqrt{1-u^2} = S.$$

Es ist aber:

$$S = {}^1\!/_2\,u\sqrt{1-u^2} + {}^1\!/_2 \text{ arc. sin. } (=u),$$

also:

$$\int d\,u\sqrt{1-u^2} = {}^1\!/_2\,[u\sqrt{1-u^2} + \text{arc. sin. } (=u)].$$

III. Integral $\dfrac{d\,u}{\sqrt{1-u^2}}$.

Es ist:

$$d \sin.\,\alpha = \cos.\,\alpha \cdot d\,\alpha,$$

also:

$$\frac{d \sin.\,\alpha}{\cos.\,\alpha} = d\,\alpha,$$

setzt man:

$$\sin.\ \alpha = u,$$

so ist:

$$d\,\alpha = \text{arc. sin, } (= u)$$

und:
$$\int \frac{d\ \sin.\ \alpha}{\cos.\ \alpha} = \int \frac{d\,u}{\sqrt{1 - u^2}} = \text{arc. sin. } (= u).$$

IV. Integral $\frac{u\,d\,u}{\sqrt{1 - u^2}}$.

Man setze:

$$\sqrt{1 - u^2} = z,$$

dann wird:

$$u = \sqrt{1 - z^2}$$

und:

$$u \cdot d\,u = - z\,d\,z,$$

also:

$$\frac{u\,d\,u}{\sqrt{1 - u^2}} = - \frac{z\,d\,z}{z},$$

$$\int \frac{u\,d\,u}{\sqrt{1 - u^2}} = \int \frac{- z\,d\,z}{z} = \int - 1\,d\,z = - z$$
$$= - \sqrt{1 - u^2}.$$

Folgendes sind nun Fundamentalformen.

I. $\int d\,u \sqrt{1 + u^2} = {}^1/_2 (u \sqrt{1 + u^2} + \log. u + \sqrt{1 + u^2};$

II. $\int d\,u \sqrt{1 - u^2} = {}^1/_2 (u \sqrt{1 - u^2} + \text{arc. sin. } (= u),$

III. $\frac{d\,u}{\sqrt{1 - u^2}} = \text{arc. sin. } (= u),$

IV. $\frac{u\,d\,u}{\sqrt{1 - u^2}} = - \sqrt{1 - u^2}.$

Differenzialformeln.

1. $d(a + u) = du$,
2. $d(au) = a \cdot du$,
3. $d(u + v + w + \cdots) = du + dv + dw + \cdots$,
4. $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$,
5. $d(uvw) = uv \cdot dw + vw \cdot du + uw \cdot dv$,
6. $d\,\frac{u}{v} = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$,
7. $d\,u^v = u^{v-1}(u \ln u \cdot dv + v \cdot du)$,
8. $d\,u^m = m\,u^{m-1} \cdot du$,
9. $d\,a^u = a^u \ln a \cdot du$,
10. $d \log.^{(a)} u = \frac{1}{u \ln a} \cdot du$,
11. $d \ln u = \frac{du}{u}$,
12. $d \sin. u = \cos. u \cdot du$,
13. $d \cos. u = - \sin. u \cdot du$,
14. $d \operatorname{arc.} \sin. u = \pm \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$,
15. $d \operatorname{arc.} \cos. u = \mp \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$,
16. $d \sec. u = \frac{\sin. u \cdot du}{\cos.^2 u}$,
17. $d \operatorname{cosec.} u = - \frac{\cos. u \cdot du}{\sin.^2 u}$,
18. $d \operatorname{arc.} \sec. u = \mp \frac{du}{u\sqrt{u^2 - 1}}$,

Quadranten (zu 14. und 15.):

	I	II	III	IV
14.	+	−	−	+
15.	−	−	+	+

Quadranten (zu 18.):

	I	II	III	IV
18.	−	+	+	−

		Quadranten: I;	II;	III;	IV;
19.	$d \text{ arc. cosec. } u = \pm \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}}$,	+	+	−	−

20. $d \text{ tang. } u = \frac{du}{\cos.^2 u}$,

21. $d \text{ cotang. } u = -\frac{du}{\sin.^2 u}$,

22. $d \text{ arc. tang. } u = \frac{du}{1+u^2}$,

23. $d \text{ arc. cotang. } u = -\frac{du}{1+u^2}$.

Integralformeln.

1. $\int a \cdot dx = a\int dx + C = ax + C$,

2. $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$,

$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$,

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$,

4. $\int e^x \cdot dx = e^x + C$,

5. $\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$,

		Quadranten: I;	II;	III;	IV;
6.	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pm \text{arc. sin. } x + C$,	+	−	−	+
7.	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mp \text{arc. cos. } x + C$,	−	−	+	+

8. $\int -\frac{dx}{1+x^2} = \text{arc. cotang.}\, x + C.$

9. Integration durch Theile: $\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du,$

wenn u und v Funktionen von x sind.

10. $\int \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \cdot \text{arc. tang.} \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot x + C,$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \ln \frac{x\sqrt{b} - \sqrt{-a}}{x\sqrt{b} + \sqrt{-a}} + C,$$

für den Fall, dass a negativ ist.

$$= \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \ln \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{-b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{-b}} + C,$$

wenn b negativ ist.

11. $\int \frac{dx}{a + bx + cx^2} = \frac{1}{c\sqrt{\frac{a}{c} - \frac{b^4}{2c}}}\ \text{arc. tang.}$

$$\frac{2cx + b}{\sqrt{4ac - 2b^4}} + C.$$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx}} = \frac{2}{b}\sqrt{a + bx} + C; \int \sqrt{a - bx} \cdot dx,$

$$= \frac{2}{3b}(\sqrt{a + bx})^3 + C; \int \frac{x\,dx}{\sqrt{a + bx}},$$

$$= \frac{2}{3b^2}(bx - 2a)\sqrt{a + bx} + C,$$

13. $\int \sqrt{1 + x^2} \cdot dx = \frac{x}{2}\sqrt{1 + x^2} + {}^1/_2 \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$

$$+ C,$$

14. $\int\sqrt{1-x^2}\cdot dx = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\,\text{arc. sin. } x + C,$

15. $\int\sqrt{a^2-x^2}\cdot dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} - \frac{1}{2}a^2\,\text{arc. tang.}$

$$\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C.$$

16. $\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\ln(b+cx$

$$+ 2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}) + C,$$

17. $\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = -\frac{2}{\sqrt{c}}\,\text{arc. tang.}$

$$\frac{\sqrt{a}\;\sqrt{a+bx-cx^2}}{x\sqrt{c}} + C,$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{c}}\,\text{arc. tang.}\sqrt{\frac{-2cx+b+\sqrt{4ac+b^2}}{2cx-b+\sqrt{4ac+b^2}}} + C,$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}}\,\text{arc. sin.}\,\frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}} + C.$$

18. Die Berechnung von

$$\int\frac{x^m\cdot dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

geschieht mittelst der Recursionsformel:

$$\int\frac{x^m dx}{X} = \frac{x^{m-1}X}{mc} - \frac{(m-1)a}{mc}\int\frac{x^{m-2}dx}{X} - \frac{(2m-1)b}{2mc}$$

$$\times\int\frac{x^{m-1}dx}{X},\text{ wenn } X = \sqrt{a+bx+cx^2} \text{ ist.}$$

19. $$\int x^{m-1}(a+bx)^n \cdot dx = \frac{x^{m-1}(a+bx)^{n+1}}{(m+n)b}$$
$$-\frac{(m-1)a}{(m-n)b} \times \int x^{m-2}(a+bx)^n \cdot dx.$$

Zur Reduktion des Exponenten von $a + bx$ dient die Formel:

$$\int x^{m-1}(a+bx)^n \cdot dx = \frac{x^m(a+bx)^n}{m+n} + \frac{na}{m+n}$$
$$\times \int x^{m-1}(a+bx)^{n-1} \cdot dx.$$

20. $\int \sin. x \cdot dx = -\cos. x + C; \int \cos. x \cdot dx = \sin. x + C.$

21. $\int \frac{dx}{\sin.^2 x} = -\text{cotang.}\, x + C; \int \frac{dx}{\cos.^2 x} = \text{tang.}\, x + C.$

22. $\int \frac{dx}{\sin. x} = \ln \text{tg.} \frac{x}{2} + C; \int \frac{dx}{\cos. x} = \ln \text{tg.} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C.$

23. $\int \frac{\sin. x \cdot dx}{\cos. x} = -\ln \cos. x + C; \int \frac{\cos. x \cdot dx}{\sin. x} = \ln \sin. x + C.$

24. $\int \sin. x \cos. x \cdot dx = \frac{1}{2} \sin.^2 x + C; \int \frac{dx}{\sin. x \cos. x} = \ln \text{tang.}\, x + C.$

25. $\int \text{tang.}\, x \cdot dx = -\ln \cos. x + C; \int \text{cotang.}\, x \cdot dx = \ln \sin. x + C.$

26. $\int x \sin. x \cdot dx = -x \cos. x + \sin. x + C;$

$\int x \cos. x \cdot dx = x \sin. x + \cos. x + C;$

27. $$\int \sin.^n x \cdot dx = -\frac{\sin.^{n-1} x \cos. x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin.^{n-2} x \cdot dx,$$

$$\int \cos.^n x \cdot dx = \frac{\sin. x \cos.^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \cdot dx.$$

28. $$\int \frac{dx}{\sin.^n x} = -\frac{\cos. x}{(n-1) \sin.^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin.^{n-2} x},$$

$$\int \frac{dx}{\cos.^n x} = \frac{\sin. x}{(n-1) \cos.^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos.^{n-2} x}.$$

29. $$\int \frac{\sin.^n x \cdot dx}{\cos.^n x} = \int \operatorname{tang.}^n x \cdot dx = \frac{\operatorname{tang.}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tang.}^{n-2} x \cdot dx,$$

$$\int \frac{\cos.^n x \cdot dx}{\sin.^n x} = \int \operatorname{cotang.}^n x \cdot dx = -\frac{\operatorname{cotang.}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{cotang.}^{n-2} x \cdot dx.$$

30. $\int \frac{d\,x}{a + b\cos.x}$

$$= -\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \frac{b + a\cos.x + \sqrt{b^2 - a^2 \sin.x}}{a + b\cos.x},$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \text{arc. tang.} \frac{-(b + \cos.x)}{\sqrt{a^2 - b^2 \sin.x}}.$$

31. $\int \text{arc. sin.}\, x \cdot d\,x = x \text{ arc. sin.}\, x \pm \sqrt{1-x^2} + C,$

Quadranten:

I;	II;	III;	IV;
+	−	−	+

32. $\int \text{arc. cos.}\, x \cdot d\,x = x \text{ arc. cos.}\, x \mp \sqrt{1-x^2} + C,$

Quadranten:

I;	II;	III;	IV;
−	−	+	+

33. $\int \text{arc. tang.}\, x \cdot d\,x = x \text{ arc. tang.}\, x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C,$

34. $\int \text{arc. cotg.}\, x \cdot d\,x = x \text{ arc. cotg.}\, x + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C,$

35. $\int_a^b = -\int_b^a; \int_a^b = \int_a^c + \int_c^b,$

36. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos.x \cdot d\,x = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos.x \cdot d\,x,$

37. $\int_0^{\pi} \sin.^2 x \cdot d\,x = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin.^2 x \cdot d\,x,$

38. $\int_0^{\pi} \cos.\,x \cdot d\,x = 0.$

39. $\int_0^{\infty} \frac{d\,x}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{2\,a},$

40. $\int_0^{a} \frac{d\,x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\pi}{2},$

41. $\int_0^{\infty} \frac{\sin.\,b\,x}{x}\, d\,x = \frac{\pi}{2},$

42. $\int_0^{\infty} \frac{\cos.\,b\,x}{x}\, d\,x = \infty,$

43. $\int_8^{\infty} c^{-x^2} \cdot d\,x = {}^1/_2 \sqrt{\pi}.$

Unbestimmte Formen.

1. Ist $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ für $x = a$ von der Form $\frac{0}{0}$, so erhält man den wahren Werth, wenn man in:

$$\frac{d\,\varphi(x)}{d\,x} \text{ und } \frac{d\,\psi(x)}{d\,x};\ x = a \text{ setzt.}$$

Bleibt auch hierbei der Bruch von der Form $\frac{0}{0}$, so hat in:

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{d x^2} \text{ und } \frac{d^2 \psi(x)}{d x^2}; x = a$$

zu setzen u. s. w.

2. Ebenso verfährt man, wenn ein Bruch unter die Form $\frac{\infty}{\infty}$ kommt.

3. Wenn in:

$$\varphi(x) \cdot \psi(x) \text{ für } x = a,$$

$$\varphi(x) = 0$$

und:

$$\psi(x) = \infty$$

wird, so setzt man zur Ermittelung des wahren Werthes:

$$\frac{1}{\psi(x)} = f(x)$$

und erhält dann den Fall ad 1.

4) Nimmt der Ausdruck:

$$\varphi(x)^{\psi(x)} \text{ für } x = a$$

die Form:

$$0^0;\ 0^\infty;\ \infty^0$$

an, so ist, wenn man:

$$\varphi(x)^{\psi(x)} = y$$

setzt:

$$\ln \cdot y = \psi(x) \cdot \ln \varphi(x).$$

mithin:

$$y = c^{\psi(x) \cdot \ln \varphi(x)}.$$

Setzt man:

$$\ln \varphi(x) = f(x),$$

so erhält man:

$$c^{\psi(x) \cdot \varphi(x)},$$

wobei es sich nur noch um die Bestimmung des Werthes des Exponenten handelt.

Maxima und Minima.

1. Um zu ermitteln, für welchen Werth von x; f (x) ein Maximum oder Minimum werde, setzt man:

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = 0$$

und löst die Gleichung in Bezug auf x auf. Wird dabei:

$$\frac{d^2\,f(x)}{d\,x^2}$$

positiv, so ist der ermittelte Werth ein Maximum. Andernfalls — wenn negativ — ein Minimum.

Wird:

$$\frac{d^2\,f(x)}{d\,x^2} = 0,$$

so ist auch:

$$\frac{d^3\,f(x)}{d\,x^3} = 0$$

und es entscheidet dann das + oder — Zeichen bei:

$$\frac{d^4\,f(x)}{d\,x^4}$$

über Maximum und Minimum.

2. Wenn f (x, y) gegeben ist, so bildet man die Differenzialgleichung:

$$\frac{d\,f}{d\,x} \cdot d\,x + \frac{d\,f}{d\,y} \cdot d\,y = 0$$

und setzt in dieselbe:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = 0.$$

Man erhält alsdann eine Gleichung zwischen x und y. Elinicirt man aus dieser und der gegebenen:

$$f(x, y) = 0$$

die Grösse y, so gelangt man gleichfalls zur Bestimmung von x.

Diesen Werth und:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = 0$$

substituirt man in die Differenzialgleichung II. Ordnung, wobei dasselbe gilt wie ad 1.

3. Ist:

$$z = f(x, y)$$

gegeben, so liefern:

$$\frac{d\,z}{d\,z} = 0 \text{ und } \frac{d\,z}{d\,y} = 0 \cdot$$

die Werthe, durch welche z zu einem Maximum oder Minimum wird.

Damit überhaupt ein Maximum oder Minimum stattfinden kann, müssen obige Werthe die Bedingung:

$$\frac{d^2 f}{d\,x^2} \cdot \frac{d^2 f}{d\,x^2} > \left(\frac{d^2 f}{d\,x \cdot d\,y}\right)^2$$

erfüllen, und je nachdem sie der Grösse:

$$\frac{d^2 f}{d\,x^2} + 2\,\frac{d^2 f}{d\,x\,d\,y} \cdot \frac{d\,y}{d\,x} + \frac{d^2 f}{d\,y^2} \cdot \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2$$

das — oder + Zeichen geben, entspreche sie einem Minimum oder Maximum.

Logarithmentafel.

Einrichtung und Gebrauch der Logarithmentafel.

Die Logarithmentafel enthält die fünf ersten Dezimalziffern (Mantisse) der gemeinen Logarithmen aller ganzen Zahlen von 10 bis 2199. Die Ziffern in der ersten Vertikal- und in der ersten Horizontalkolonne entsprechen den Nummern oder Zahlenwerthen, die übrigen Ziffern aber sind die diesen angehörigen Logarithmen ohne Kennziffern (Charakteristik) oder Ganze. Hat man die vordersten zwei oder drei Ziffern einer Zahl in der ersten Vertikalkolonne und die hinterste derselben in der ersten Horizontalreihe aufgesucht, so findet man den dieser Zahl entsprechenden Logarithmen, indem man den Ziffernkomplex aufsucht, der mit den ersten Ziffern in einerlei Horizontal- und mit der letzten Ziffer in einerlei Vertikalreihe zugleich steht. Z. B. für die Zahl 365 ist die Mantisse = 56229, weil diese Zahl in der mit 36 anfangenden Horizontal- und in der mit 5 anfangenden Vertikalreihe zugleich steht. Ebenso ist die Mantisse oder der die Dezimalstellen bildende Theil der Logarithmen von der Zahl 1379 = 13956, weil diese Zahl denjenigen Ort einnimmt, wo die durch (137) gehende

Horizontal- und die durch (9) gehende Vertikallinie sich begegnen.

Besteht die gegebene Zahl aus weniger als drei Ziffern, so hat man dieselbe durch Anhängen von Nullen in eine dreizifferige Zahl umzuändern, und nun das Aufsuchen auf die eben gezeigte Weise zu vollziehen. Hiernach hat man also statt 29 die Zahl 290 zu schreiben und findet die Mantisse des Logarithmen von 29 oder von 290 = 46240, ebenso findet man dieselbe für die Zahl 6 oder 60 oder 600 = 77815. Will man diese kleine Logarithmentafel auch zum Aufsuchen von Zahlen über 2199 gebrauchen, so muss man sich des Interpolirens bedienen, wobei die in der weiteren Vertikalkolonne enthaltenen Differenzen in Anwendung zu bringen sind. Hiernach findet man z. B. die Mantisse des Logarithmen von 3452 = 53782 + 0,2 × 126 = 53782 + 25 = 53807, weil 53782 der Zahl 345 entspricht und die Differenz zwischen den Logarithmen dieser Zahl und der nächstfolgenden (346) = 126 ist. Auf gleiche Weise findet man zur Zahl 7915 die logarithmische Mantisse = 89818 + 0,5 × 55 = 89818 + 27 = 89845, weil 89818 der Zahl 791 entspricht und 55 die Differenz zwischen den Logarithmen von 791 und 792 ist.

Zur Auffindung der die Ganzen angebenden Kennziffer dient die Regel: die um Eins verminderte Anzahl der die Ganzen der gegebenen Zahl ausdrückenden Ziffern gibt die Ganzen oder die Charakteristik des entsprechenden Logarithmen. Hiernach ist z. B. die Kennziffer des Logarithmen von 365 = 3 — 1 = 2, weil 365 aus drei, lauter Ganze anzeigenden Ziffern besteht; dagegen die Kennziffer des Logarithmen von 36,5 = 2 — 1 = 1, weil 36,5 nur zwei Ziffern (3) und (6) enthält, welche Ganze ausdrücken; es ist ferner die Kennziffer zum Logarithmen aus 3,65 = 1 — 1 = 0, weil in dieser Zahl nur eine Ziffer (3) vorhanden ist, welche Ganze angibt; endlich hat man für den Logarithmen aus 3650 die Charakteristik = 4 — 1 = 3, weil es hier vier Ziffern gibt, wodurch Ganze ausgedrückt werden. Hienach ist:

log. 3650 = 3,56229,
log. 365 = 2,56229,
log. 36,5 = 1,56229,
log. 3,65 = 0,56229.

Hat der Zahlenwerth keine Ganzen, fängt also derselbe mit Nullen an, so hat man am Ende der Mantisse eine negative Charakteristik hinzuzufügen, die aus soviel Einheiten besteht, als die Zahl selbst Nullen vorstehen hat. So ist z. B. für die Zahl 0,1379 die logarithmische Charakteristik = — 1 und für 0,01379 dieselbe = — 2 u. s. w., weil jene Zahl (0,1379) mit einer, diese Zahl (0,01379) aber mit zwei Nullen anfängt. Man hat demnach:

log. 0,1379 = 0,13956 — 1,
log. 0,01379 = 0,13956 — 2,
log. 0,001379 = 0,13956 — 3 u. s. w.

Um zu einem gegebenen Logarithmen den Numerus zu finden, hat man die vollständige Mantisse mit Berücksichtigung der etwa vorstehenden Nullen in der Tabelle aufzusuchen und von der so gefundenen Stelle aus horizontal herüber und vertikal aufwärts zu gehen: die sich an den Enden dieser Bewegungen vorfindenden Ziffern geben, neben einander gesetzt, die entsprechende Zahl, wenn man noch so viel Ziffern als Ganze abschneidet, als die um Eins vermehrte Charakteristik Einheiten hat, oder so viel Nullen anhängt, als die etwa vorkommende negative Kennziffer unmittelbar angibt.

Hiernach ist z. B. der Numerus für den Logarithmen 2,93146 = 854, denn von der Mantisse 93146 aus links und aufwärts gegangen, stösst man auf die Ziffern 85 und 4, und die um Eins vermehrte Charakteristik (2) zeigt an, dass die Ganzen des Numerus aus (2 + 1) = 3 Ziffern bestehen sollen. Dagegen ist der Numerus des Logarithmen 0,78319 = 6,07, denn die Mantisse 78319 steht in der mit 60 anfangenden Horizontal- und in der mit 7 anfangenden Vertikalreihe, und es ist als Ganze nur eine Ziffer (6) abzuschneiden, weil, wenn man zur Charakteristik (Null)

Eins hinzufügt, wieder Eins daraus hervorgeht. Für den Logarithmen 0,61805 — 2 ist endlich der Numerus = 0,0415, denn 41 und 5 stehen mit 61805 in einerlei Horizontal- und Vertikallinie und die beiden Nullen entsprechen der negativen Kennziffer (— 2).

Auf gleiche Weise findet man:

num. log. 3,67852 = 4770
„ „ 1,67852 = 47,7
„ „ 0,67852 — 1 = 0,477
„ „ 0,67852 — 3 = 0,00477.

Findet man die Mantisse des gegebenen Logarithmen nicht genau in der Tabelle, so hat man den Numerus der nächst kleineren Mantisse aufzusuchen, und, wenn eine grössere Genauigkeit verlangt wird, den fehlenden Theil durch Interpolation zu finden. Z. B. für den Logarithmen 1,79407 ist annähernd der Numerus = 62,2, denn dieser entspricht dem nächst kleinern Logarithmen 1,79379. Nun ist aber die Differenz der zwei Mantissen 79407 und 79379 = 28, und die Differenz der zunächst aufeinander folgenden Mantissen in der Tafel = 79449 — 79379 = 70; es folgt daher die nöthige Korrektion $= \frac{28}{70} = 0{,}4$, die gesuchte Zahl also = 62,24.

Auf gleiche Weise folgt:

num. log. $0{,}65118 — 4{,}47 + \frac{118 - 31}{9700} = 4{,}47 + \frac{87}{9700}$ = 4,479, denn 87 ist die Differenz zwischen den Mantissen des gegebenen und des nächst kleinern Logarithmen, und 97 ist die zwischen der nächst grössern und nächst kleinern Mantisse.

Ebenso num. log. $0{,}46951 - 2 = 0{,}0294 + \frac{951 - 835}{1470000}$ $= 0{,}0294 + \frac{0{,}0116}{147} = 0{,}02948.$

Ist die Mantisse des gegebenen Logarithmen kleiner als 34223, so kann man die Interpolation vereinfachen oder gar unnöthig machen, wenn man sich der zweiten Hälfte der Tafel bedient, die gegebene Mantisse also in dieser aufsucht. So gibt dieselbe für den Logarithmen 3,26174 den vierzifferigen Numerus 1827 unmittelbar; auch erhält man den Numerus der Logarithmen 0,21152 = 1,627 mit der Korrektion $\frac{52-39}{26} = \frac{13}{26} = 0{,}5$, also num. log. 0,21152 = 1,6275.

Anwendung der Logarithmen auf das Rechnen.

1. Das Produkt zweier Zahlen wird erhalten, wenn man die Logarithmen der Zahlen addirt und zur Summe den Numerus aufsucht.

2. Der Quotient zweier Zahlen ergibt sich, wenn man den Logarithmen des Divisors von dem Logarithmen des Dividenden abzieht und zu dem erhaltenen Reste die Zahl aufsucht.

3. Eine Zahl wird zur Potenz erhoben, wenn man den Logarithmen derselben durch den Exponenten multiplizirt und zu dem Produkte den Numerus sucht.

4. Man findet die Wurzel einer gegebenen Zahl, wenn man den Logarithmen derselben durch den Exponenten dividirt und zu dem Quotienten den Numerus aufsucht.

Nr.	0	1	2	3	4	5
10	00000	00432	00860	01284	01703	02119
11	04139	04532	04922	05308	05690	06070
12	07918	08279	08636	08991	09342	09691
13	11394	11727	12057	12385	12710	13033
14	14613	14922	15229	15534	15836	16137
15	17609	17898	18184	18469	18752	19033
16	20412	20683	20952	21219	21484	21748
17	23045	23300	23553	23805	24055	24304
18	25527	25768	26007	26245	26482	26717
19	27875	28103	28330	28556	28780	29003
20	30103	30320	30535	30750	30963	31175
21	32222	32428	32634	32838	33041	33244
22	34242	34439	34635	34830	35025	35218
23	36173	36361	36549	36736	36922	37107
24	38021	38202	38382	38561	38739	38917
25	39794	39967	40140	40312	40483	40654
26	41497	41664	41830	41996	42160	42325
27	43136	43297	43457	43616	43775	43933
28	44716	44871	45025	45179	45332	45484
29	46240	46389	46538	46687	46835	46982
30	47712	47857	48001	48144	48287	48430
31	49136	49276	49415	49554	49693	49831
32	50515	50651	50786	50920	51055	51188
33	51851	51983	52114	52244	52375	52504
34	53148	53275	53403	53529	53656	35782
35	54407	54531	54654	54777	54900	55023
36	55630	55751	55871	55991	56110	56229
37	56820	56937	57054	57171	57287	57403
38	57978	58093	58206	58320	58433	58546
39	59106	59218	59329	59439	59550	59660

Nr.	6	7	8	9	Differenzen.
10	02531	02938	03342	03743	432 ÷ 396
11	06446	06819	07188	07555	393 ÷ 363
12	10037	10380	10721	11059	361 ÷ 335
13	13354	13672	13988	14301	333 ÷ 312
14	16435	16732	17026	17319	309 ÷ 290
15	19312	19590	19866	20140	289 ÷ 272
16	22011	22272	22531	22789	271 ÷ 256
17	24551	24797	25042	25285	255 ÷ 242
18	26951	27184	27416	27646	241 ÷ 229
19	29226	29447	29667	29885	228 ÷ 218
20	31387	31597	31806	32015	217 ÷ 207
21	33445	33646	33846	34044	206 ÷ 198
22	35411	35603	35793	35984	197 ÷ 189
23	37291	37475	37658	37840	188 ÷ 181
24	39094	39270	39445	39620	181 ÷ 174
25	40824	40993	41162	41330	173 ÷ 167
26	42488	42651	42813	42975	167 ÷ 161
27	44091	44248	44404	44560	161 ÷ 156
28	45637	45788	45939	46090	155 ÷ 150
29	47129	47276	47422	47567	149 ÷ 145
30	48572	48714	48855	48996	145 ÷ 140
31	49969	50106	50243	50379	140 ÷ 136
32	51322	51455	51587	51720	136 ÷ 132
33	52634	52763	52892	53020	132 ÷ 128
34	53908	54033	54158	54283	127 ÷ 124
35	55145	55267	55388	55509	124 ÷ 121
36	56348	56467	56585	56703	121 ÷ 117
37	57519	57634	57749	57864	117 ÷ 114
38	58659	58771	58883	58995	115 ÷ 111
39	59770	59879	59988	60097	112 ÷ 109

Nr.	0	1	2	3	4	5
40	60206	60314	60423	60531	60638	60746
41	61278	61384	61490	61595	61700	61805
42	62325	62428	62531	62634	62737	62839
43	63347	63448	63548	63649	63749	63849
44	64345	64444	64542	64640	64738	64836
45	65321	65418	65514	65610	65706	65801
46	66276	66370	66464	66558	66652	66745
47	67210	67302	67394	67486	67578	67669
48	68124	68215	68305	68395	68485	68574
49	69020	69108	69197	69285	69373	69461
50	69897	69984	70070	70157	70243	70329
51	70757	70842	70927	71012	71096	71181
52	71600	71684	71767	71850	71933	72016
53	72428	72509	72561	72673	72754	72835
54	73239	73320	73400	73480	73560	73640
55	74036	74115	74194	74273	74351	74429
56	74819	74896	74974	75051	75128	75205
57	77587	75664	75740	75815	75891	75967
58	76343	76418	76492	76567	76641	76716
59	77085	77159	77232	77305	77379	77452
60	77815	77887	77960	78032	78104	78176
61	78533	78604	78675	78746	78817	78888
62	79239	79309	79379	79449	79518	79588
63	79934	80003	80072	80140	80209	80277
64	80618	80686	80754	80821	80889	80956
65	81291	81358	81425	81491	81558	81624
66	81954	82020	82086	82151	82217	82282
67	82607	82672	82737	82802	82866	82930
68	83251	83315	83378	83442	83506	83569
69	83885	83948	84011	84073	84136	84198

Nr.	6	7	8	9	Differenzen.
40	60853	60959	61066	61172	108 ÷ 106
41	61909	62014	62118	62221	106 ÷ 104
42	62941	63043	63144	63246	103 ÷ 101
43	63949	64048	64147	64246	101 ÷ 99
44	64933	65031	65128	65225	99 ÷ 97
45	65896	65992	66087	66181	97 ÷ 95
46	66839	66932	67025	67117	94 ÷ 93
47	67761	67852	67943	68034	92 ÷ 90
48	68664	68753	68842	68931	90 ÷ 89
49	69548	69636	69723	69810	88 ÷ 87
50	70415	70501	70586	70672	87 ÷ 86
51	71265	71349	71433	71517	84 ÷ 85
52	72099	72181	72263	72346	83
53	72916	72997	73078	73159	81
54	73719	73799	73878	73957	80
55	74507	74586	74663	74741	78
56	75282	75358	75435	75511	77
57	76042	76118	76193	76268	76
58	76790	76864	76938	77012	74
59	77525	77597	77670	77743	73
60	78247	78319	78390	78462	72
61	78958	79029	79099	79169	71
62	79657	79727	79796	79865	69
63	80346	80414	80482	80550	68
64	81023	81090	81158	81224	67
65	81690	81757	81823	81889	66
66	82347	82413	82478	82543	65
67	82995	83059	83123	83187	64
68	83632	83696	83759	83822	63
69	84261	84323	84386	84448	63

Nr.	0	1	2	3	4	5
70	84510	84572	84634	84696	84757	94819
71	85126	85187	85248	85309	85370	85431
72	85733	85794	85854	85914	85974	86034
73	86332	86392	86451	86510	86570	86629
74	86923	86982	87040	87099	87157	87216
75	87506	87564	87622	87680	87737	87795
76	88081	88138	88196	88252	88309	88366
77	88649	88705	88762	88818	88874	88930
78	89209	89265	89321	89376	89432	89487
79	89763	89818	89873	89927	89982	90037
80	90309	90363	90417	90472	90526	90580
81	90849	90902	90956	91009	91062	91116
82	91381	91434	91487	91540	91593	91645
83	91908	91960	92012	92065	92117	92169
84	92428	92480	92531	92583	92634	92686
85	92942	92993	93044	93095	93146	93197
86	93450	93500	93551	93601	93651	93702
87	93952	94002	94052	94101	94151	94201
88	94448	94498	94547	94596	94645	94694
89	94939	94988	95036	95085	95134	95182
90	95424	95472	95521	95569	95617	95665
91	95904	95952	95999	96047	96095	96142
92	96379	96426	96473	96520	96567	96614
93	96848	96895	96942	96988	97035	97081
94	97313	97359	97405	97451	97497	97543
95	97772	97818	97864	97909	97955	98000
96	98227	98272	98318	98363	98408	98453
97	98677	98722	98767	98811	98856	98900
98	99123	99167	99211	99255	99300	99344
99	99564	99607	99651	99695	99739	99782

Nr.	6	7	8	9	Differenzen.
70	84880	84942	85003	85065	62
71	85491	85552	85612	85673	61
72	86094	86153	86213	86273	60
73	86688	86747	86806	86864	59
74	87274	87332	87390	87448	58
75	87852	87910	87967	88024	58
76	88423	88480	88536	88593	57
77	88986	89042	89098	89154	56
78	89542	89597	89653	89708	55
79	90091	90146	90200	90255	55
80	90634	90687	90741	90795	54
81	91169	91222	91275	91328	53
82	91698	91751	91803	91855	53
83	92221	92273	92324	92376	52
84	92737	92788	92840	92891	51
85	93247	93298	93349	93399	51
86	93752	93802	93852	93902	50
87	94250	94300	94349	94399	50
88	94743	94792	94841	94890	49
89	95231	95279	95328	95376	49
90	95713	95761	95809	95856	48
91	96190	96237	96284	96332	47
92	96661	96708	96755	96802	47
93	97128	97174	97220	97267	46
94	97589	97635	97681	97727	46
95	98046	98091	98137	98182	45
96	98498	98543	98588	98632	45
97	98945	98989	99034	99078	45
98	99388	99432	99476	99520	44
99	99826	99870	99913	99957	44

Nr.	0	1	2	3	4	5
100	00000	00043	00087	00130	00173	00217
101	00432	00475	00518	00561	00604	00647
102	00860	00903	00945	00988	01030	01072
103	01284	01326	01368	01410	01452	01494
104	01703	01745	01787	01828	01870	01912
105	02119	02160	02202	02243	02284	02325
106	02531	02572	02612	02653	02694	02735
107	02938	02979	03019	03060	03100	03141
108	03342	03383	03423	03463	03500	03543
109	03743	03782	03822	03862	03903	03941
110	04139	04179	04218	04258	04297	04336
111	04532	04571	04610	04650	04689	04727
112	04922	04961	04999	05038	05077	05115
113	05308	05346	05385	05423	05461	05500
114	05690	05729	05767	05805	05843	05881
115	06070	06108	06145	06183	06221	06258
116	06446	06483	06521	06558	06595	06633
117	06819	06856	06893	06930	06967	07004
118	07188	07225	07262	07298	07335	07372
119	07555	07591	07628	07664	07700	07737
120	07918	07954	07990	08027	08063	08099
121	08279	08314	08350	08386	08422	08458
122	08636	08672	08707	08743	08778	08814
123	08991	09026	09061	09096	09132	09167
124	09342	09377	09412	09447	09482	09517
125	09691	09726	09760	09795	09830	09864
126	10037	10072	10106	10140	10175	10209
127	10380	10415	10449	10483	10517	10551
128	10721	10755	10789	10823	10857	10890
129	11059	11093	11126	11160	11193	11227

Nr.	6	7	8	9	Differenzen.
100	00260	00303	00346	00389	43
101	00689	00732	00775	00817	43
102	01115	01157	01199	01242	42
103	01536	01578	01620	01662	42
104	01953	01995	02036	02078	42
105	02366	02408	02449	02490	41
106	02776	02816	02857	02898	41
107	03181	03222	03262	03302	41
108	03583	03623	03663	03703	40
109	03981	04021	04060	04100	40
110	04376	04415	04454	04493	39
111	04766	04805	04844	04883	39
112	05154	05192	05231	05269	39
113	05538	05576	05614	05652	38
114	05918	05956	05994	06032	38
115	06296	06333	06371	06408	38
116	06670	06707	06744	06781	37
117	07041	07078	07115	07151	37
118	07408	07445	07482	07518	37
119	07773	07809	07846	07882	36
120	08135	08171	08207	08243	36
121	08493	08529	08565	08600	36
122	08849	08884	08920	08955	36
123	09202	09237	09272	09307	35
124	09552	09587	09621	09656	35
125	09899	09934	09968	10003	35
126	10243	10278	10312	10346	34
127	10585	10619	10653	10687	34
128	10924	10958	10992	11025	34
129	11261	11294	11327	11361	33

Nr.	0	1	2	3	4	5
130	11394	11428	11461	11494	11528	11561
131	11727	11760	11793	11826	11860	11893
132	12057	12090	12123	12156	12189	12222
133	12385	12418	12450	12483	12516	12548
134	12710	12743	12775	12808	12840	12872
135	13033	13066	13098	13130	13162	13194
136	13354	13386	13418	13450	13481	13513
137	13672	13704	13735	13767	13799	13830
138	13988	14019	14051	14082	14114	14145
139	14301	14333	14364	14395	14426	14457
140	14613	14644	14675	14706	14737	14768
141	14922	14953	14983	15014	15045	15076
142	15229	15259	15290	15320	15351	15381
143	15534	15564	15594	15625	15655	15685
144	15836	15866	15897	15927	15957	15987
145	16137	16167	16197	16227	16256	16286
146	16435	16465	16495	16524	16554	16584
147	16732	16761	16791	16820	16850	16879
148	17026	17056	17085	17114	17143	17173
149	17319	17348	17377	17406	17435	17464
150	17609	17638	17667	17696	17725	17754
151	17898	17926	17955	17984	18126	18041
152	18184	18213	18241	18270	18299	18327
153	18469	18498	18526	18554	18583	18611
154	18752	18780	18808	18837	18865	18893
155	19033	19061	19089	19117	19145	19173
156	19312	19340	19368	19396	19424	19451
157	19590	19618	19645	19673	19700	19728
158	19866	19893	19921	19948	19976	20003
159	20140	20167	20194	20222	20249	20276

Nr.	6	7	8	9	Differenzen.
130	11594	11628	11661	11694	33
131	11926	11959	11992	12024	33
132	12254	12287	12320	12353	32
133	12581	12613	12646	12678	32
134	12905	12937	12969	13001	32
135	13226	13258	13290	13322	32
136	13545	13577	13609	13640	32
137	13862	13893	13925	13956	32
138	14176	14208	14239	14270	31
139	14489	14520	14551	14582	31
140	14799	14829	14860	14891	31
141	15106	15137	15168	15198	31
142	15412	15442	15473	15503	31
143	15715	15746	15776	15806	30
144	16017	16047	16077	16107	30
145	16316	16346	16376	16406	30
146	16613	16643	16673	16702	30
147	16909	16938	16967	16997	29
148	17202	17231	17260	17289	29
149	17493	17522	17551	17580	29
150	17783	17811	17840	17869	29
151	18070	18099	18127	18156	29
152	18355	18384	18412	18441	28
153	18639	18667	18696	18724	28
154	18921	18949	18977	19005	28
155	19201	19229	19257	19285	28
156	19479	19507	19535	19562	28
157	19756	19783	19811	19838	28
158	20030	20058	20085	20112	27
159	20303	20330	20358	20385	27

Nr.	0	1	2	3	4	5
160	20412	20439	20466	20493	20520	20548
161	20683	20710	20737	20763	20790	20817
162	20952	20978	21005	21032	21059	21085
163	21219	21245	21272	21299	21325	21352
164	21484	21511	21537	21564	21590	21617
165	21748	21775	21801	21827	21854	21880
166	22011	22037	22063	22089	22115	22141
167	22272	22298	22324	22350	22376	22401
168	22531	22557	22583	22608	22634	22660
169	22789	22814	22840	22866	22891	22917
170	23045	23070	23096	23121	23147	23172
171	23300	23325	23350	23376	23401	23426
172	23553	23578	23603	23629	23654	23679
173	23805	23830	23855	23880	23905	23930
174	24055	24080	24105	24130	24155	24180
175	24304	24329	24353	24378	24403	24428
176	24551	24576	24601	24625	24650	24674
177	24797	24822	24846	24871	24895	24920
178	25042	25066	25091	25115	25139	25164
179	25285	25310	25334	25358	25382	25406
180	25527	25551	25575	25600	25624	25648
181	25768	25792	25816	25840	25864	25888
182	26007	26031	26055	26079	26102	26126
183	26245	26269	26293	26316	26340	26364
184	26482	26505	26529	26553	26576	26600
185	26717	26741	26764	26788	26811	26834
186	26951	26975	26998	27021	27045	27068
187	27184	27207	27231	27254	27277	27300
188	27416	27439	27462	27485	27508	27531
189	27646	27669	27692	27715	27738	27761

Nr.	6	7	8	9	Differenzen.
160	20575	20602	20629	20656	27
161	20844	20871	20898	20925	27
162	21112	21139	21165	21192	27
163	21378	21405	21431	21458	27
164	21643	21669	21696	21722	26
165	21906	21932	21958	21985	26
166	22168	22194	22220	22246	26
167	22427	22453	22479	22505	26
168	22686	22712	22737	22763	26
169	22943	22968	22994	23019	26
170	23198	23223	23249	23274	25
171	23452	23477	23502	23528	25
172	23704	23729	23754	23780	25
173	23955	23980	24005	24030	25
174	24204	24229	24254	24279	25
175	24452	24477	24502	24527	25
176	24699	24724	24748	24773	25
177	24944	24969	24993	25018	24
178	25188	25212	25237	25261	24
179	25431	25455	25479	25503	24
180	25672	25696	25720	25744	24
181	25912	25935	25959	25983	24
182	26150	26174	26198	26221	24
183	26387	26411	26435	26458	24
184	26623	26647	26670	26694	24
185	26858	26881	26905	26928	23
186	27091	27114	27138	27161	23
187	27323	27346	27370	27393	23
188	27554	27577	27600	27623	23
189	27784	27807	27830	27853	23

Nr.	0	1	2	3	4	5
190	27875	27898	27921	27944	27967	27990
191	28103	28126	28149	28172	28194	28217
192	28330	28353	28375	28398	28421	28443
193	28556	28578	28601	28623	28646	28668
194	28780	28803	28825	28847	28870	28892
195	29003	29026	29048	29070	29092	29115
196	29226	29248	29270	29292	29314	29336
197	29447	29469	29491	29513	29535	29557
198	29667	29688	29710	29732	29754	29776
199	29885	29907	29929	29951	29973	29994
200	30103	30125	30146	30168	30190	30211
201	30320	30341	30363	30384	30406	30428
202	30535	30557	30578	30600	30621	30643
203	30750	30771	30792	30814	30835	30856
204	30963	30984	31006	31027	31048	31069
205	31175	31197	31218	31239	31260	31281
206	31387	31408	31429	31450	31471	31492
207	31597	31618	31639	31660	31681	31702
208	31806	31827	31848	31869	31890	31911
209	32015	32035	32056	32077	32098	32118
210	32222	32243	32263	32284	32305	32325
211	32428	32449	32469	32490	32511	32531
212	32634	32654	32675	32695	32715	32736
213	32838	32858	32879	32899	32919	32940
214	33041	33062	33082	33102	33122	33143
215	33244	33264	33284	33304	33325	33345
216	33445	33465	33486	33506	33526	33546
217	33646	33666	33686	33706	33726	33746
218	33846	33866	33885	33905	33925	33945
219	34044	34064	34084	34104	34124	34143

Nr.	6	7	8	9	Differenzen.
190	28012	28035	28058	28081	23
191	28240	28262	28285	28308	23
192	28466	28488	28511	28533	23
193	28691	28713	28735	28758	22
194	28914	28937	28959	28981	22
195	29137	29159	29181	29203	22
196	29358	29380	29403	29425	22
197	29579	29601	29623	29645	22
198	29798	29820	29842	29863	22
199	30016	30038	30060	30081	22
200	30233	30255	30276	30298	22
201	30449	30471	30492	30514	22
202	30664	30685	30707	30728	22
203	30878	30899	30920	30942	22
204	31091	31112	31133	31154	21
205	31302	31323	31345	31366	21
206	31513	31534	31555	31576	21
207	31723	31744	31765	31785	21
208	31931	31952	31973	31994	21
209	32139	32160	32181	32201	21
210	32346	32366	32387	32408	21
211	32552	32572	32593	32613	21
212	32756	32777	32797	32818	21
213	32960	32980	33001	33021	20
214	33163	33183	33203	33224	20
215	33365	33385	33405	33425	20
216	33566	33586	33606	33626	20
217	33766	33786	33806	33826	20
218	33965	33985	34005	34025	20
219	34163	34183	34203	34223	20

Tafel der natürlichen Logarithmen.

Einrichtung und Gebrauch der nachstehenden Tafel.

Ausser den gemeinen oder briggischen, sich auf die Grundzahl 10 beziehenden Logarithmen, braucht man zuweilen noch die natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen, deren Grundzahl 2,7182818 • • • ist. Nachstehende Tafel enthält die Werthe derselben für die natürliche Zahlenreihe 1, 2, 3 • • • bis 299. Die Einrichtung dieser Tafel weicht von der Einrichtung der die gemeinen Logarithmen enthaltenden Logarithmentafel nicht ab. Hat man die letzte Ziffer der gegebenen Zahl in der obersten Horizontalreihe und die vorhergehende Ziffer oder das vorhergehende Ziffernpaar in der vordern Vertikalreihe aufgesucht, so findet man den entsprechenden natürlichen Logarithmus, wenn man von jener Ziffer ab- und von dieser Ziffer oder diesem Ziffernpaare bis zur Begegnung herübergeht. Z. B. log. nat. 73 ist = 4,2905, weil diese Zahl vertikal unter der letzten Ziffer (3) und mit der ersten Ziffer (7) in einerlei Horizontalreihe liegt. Ebenso ist log. nat. 157 = 5,0562, denn diese Zahl steht in der mit 7 überschriebenen Vertikal- und in der mit 15 anfangenden Horizontalreihe.

Mit Hilfe dieser Tabelle lassen sich leicht andere Logarithmen finden, welche in der Tabelle selbst nicht stehen, wenn man die einfachsten Regeln der Logarithmenrechnung zur Anwendung bringt. Z. B.:

$$\text{log. nat. } 1{,}84 = \text{log. nat. } \left(\frac{184}{100}\right)$$

$$= \text{log. nat. } 184 - \text{log. nat. } 100 = 5{,}2149 - 4{,}6052 = 4{,}6097.$$

Ebenso:

$$\text{log. nat. } \frac{67}{136} = \text{log. nat. } 67 - \text{log. nat. } 136$$

$$= 4{,}2047 - 4{,}9127 = -0{,}7080.$$

Geht die Zahl über 299 hinaus, so muss man das Interpolationsverfahren einschlagen, um den entsprechenden Logarithmus zu finden. Z. B.: log. nat. 124,7 $=$ log. nat. 124 $+ 0,7 \times$ (log. nat. 125 — log. nat. 124) $= 4,8203 + 0,7 \times (4,8283 - 4,8203) = 4,8203 + 0,7 \times 0,0080 = 4,8203 + 0,0056 = 4,8259$.

Durch Zerlegung in Faktoren kann man zuweilen die Interpolation entbehrlich machen. Z. B.: log. nat. 1247 $=$ log. nat. $(29 \times 43) =$ log. nat. 29 $+$ log. nat. 43 $= 3,3673 + 3,7612 = 7,1285$; daher log. nat. 124,7 $=$ log. nat. $\left(\frac{1247}{10}\right) =$ log. nat. 1247 — log. nat. 10 $= 7,1285 - 2,3026 = 4,8259$, wie so eben gefunden wurde.

Um zu den natürlichen Logarithmen die Zahl zu finden, ist das Interpolationsverfahren fast immer einzuschlagen. Welche Zahl x entspricht z. B. dem natürlichen Logarithmus 5,0900? log. nat. 162 $= 5,0876$ und log. nat. 163 $= 5,0938$; daher log. nat. 163 — log. nat. 162 $= 0,0062$, und log. nat. x — log. nat. 162 $= 0,0024$. Setzt man nun:

$$\frac{x - 162}{163 - 162} = \frac{\text{log. nat. } x - \text{log. nat. } 162}{\text{log. nat. } 163 - \text{log. nat. } 162} = \frac{0,0024}{0,0062},$$

so erhält man:

$$x = 162 + \frac{24}{62} = 162,4.$$

Ferner: log. nat. x sei $= 6,9045$, was ist x?

log. nat. 10 $= 2,3026$, daher log. nat. $\frac{x}{10}$, oder log. nat. x — log. nat. 10 $= 4,6019$. Nun ist log. nat. 100 $= 4,6052$ und log. nat. 99 $= 4,5951$; es folgt daher:

$$\frac{\frac{x}{10} - 99}{100 - 99} = \frac{4,6019 - 4,5951}{4,6052 - 4,5951},$$

$$\frac{x}{10} = 99 + \frac{68}{101} = 99,67 \text{ und } x = 996,7.$$

Nr.	0	1	2	3	4
0	$-\infty$	0,0000	0,6931	1,0986	1,3863
1	2,3026	2,3979	2,4849	2,5649	2,6391
2	2,9957	3,0445	3,0910	3,1355	3,1781
3	3,4012	3,4340	3,4657	3,4965	3,5264
4	3,6889	3,7136	3,7377	3,7612	3,7842
5	3,9120	3,9318	3,9512	3,9703	3,9890
6	4,0943	4,1109	4,1271	4,1431	4,1589
7	4,2485	4,2627	4,2767	4,2905	4,3041
8	4,3820	4,3944	4,4067	4,4188	4,4308
9	4,4998	4,5109	4,5218	4,5326	4,5433
10	4,6052	4,6151	4,6250	4,6347	4,6444
11	4,7005	4,7095	4,7185	4,7274	4,7362
12	4,7875	4,7958	4,8040	4,8122	4,8203
13	4,8675	4,8752	4,8828	4,8903	4,8978
14	4,9416	4,9488	4,9558	4,9628	4,9698
15	5,0106	5,0173	5,0239	5,0304	5,0370
16	5,0752	5,0814	5,0876	5,0938	5,0999
17	5,1358	5,1417	5,1475	5,1533	5,1591
18	5,1930	5,1985	5,2040	5,2095	5,2149
19	5,2470	5,2523	5,2575	5,2627	5,2679
20	5,2983	5,3033	5,3083	5,3132	5,3181
21	5,3471	5,3519	5,3566	5,3613	5,3660
22	5,3936	5,3982	5,4027	5,4072	5,4116
23	5,4381	5,4424	5,4467	5,4510	5,4553
24	5,4806	5,4848	5,4889	5,4931	5,4972
25	5,5215	5,5255	5,5294	5,5334	5,5373
26	5,5607	5,5645	5,5683	5,5722	5,5759
27	5,5984	5,6021	5,6058	5,6095	5,6131
28	5,6348	5,6384	5,6419	5,6454	5,6490
29	5,6699	5,6733	5,6768	5,6802	5,6836

Nr.	5	6	7	8	9
0	1,6094	1,7918	1,9459	2,0794	2,1972
1	2,7081	2,7726	2,8332	2,8904	2,9444
2	3,2189	3,2581	3,2958	3,3322	3,3673
3	3,5553	3,5835	3,6109	3,6376	3,6636
4	3,8067	3,8286	3,8501	3,8712	3,8918
5	4,0073	4,0254	4,0431	4,0604	4,0775
6	4,1744	4,1897	4,2047	4,2195	4,2341
7	4,3175	4,3307	4,3438	4,3567	4,3694
8	4,4427	4,4543	4,4659	4,4773	4,4886
9	4,5539	4,5643	4,5747	4,5850	4,5951
10	4,6540	4,6634	4,6728	4,6821	4,6913
11	4,7449	4,7536	4,7622	4,7707	4,7791
12	4,8283	4,8363	4,8442	4,8520	4,8598
13	4,9053	4,9127	4,9200	4,9273	4,9345
14	4,9767	4,9836	4,9904	4,9972	4,0039
15	5,0434	5,0499	5,0562	5,0626	5,0689
16	5,1059	5,1120	5,1180	5,1240	5,1299
17	5,1648	5,1705	5,1761	5,1818	5,1874
18	5,2204	5,2257	5,2311	5,2364	5,2417
19	5,2730	5,2781	5,2832	5,2883	5,2933
20	5,3230	5,3279	5,3327	5,3375	5,3423
21	5,3706	5,3753	5,3799	5,3845	5,3891
22	5,4161	5,4205	5.4250	5,4293	5,4337
23	5,4596	5,4638	5,4681	5,4723	5,4765
24	5,5013	5,5053	5,5094	5,5134	5,5175
25	5,5413	5,5452	5,5491	5,5530	5,5568
26	5,5797	5,5835	5,5872	5,5910	5,5947
27	5,6168	5,6204	5,6240	5,6276	5,6312
28	5,6525	5,6560	5,6595	5,6630	5,6664
29	5,6870	5,6904	5,6937	5,6971	5,7004

Tafel zur Verwandlung der Logarithmen.

Einrichtung und Gebrauch der nachstehenden Tafel.

Mit Hilfe dieser kleinen Tabelle lässt sich durch einfaches Addiren der gemeine Logarithmus in einen natürlichen und umgekehrt der natürliche in einen gemeinen verwandeln. Der gemeine Logarithmus ergibt sich aus dem natürlichen, wenn man diesen mit der Zahl 0,434294 • • •, die man den Modul des gemeinen Logarithmensystems nennt, multiplizirt; den natürlichen Logarithmus hingegen erhält man, wenn man den gemeinen Logarithmus durch eben diesen Modul dividirt, oder durch seinen reciproken Werth 2,302585 • • • multiplizirt. Der erste Theil der folgenden Tabelle enthält die 1, 2, 3, 4 • • • • 9fachen Werthe von 2,3026, 0,2303, 0,0230 u. s. w., und der zweite Theil die 1, 2, 3, 4 • • • • 9fachen Werthe von 0,43429, 0,04343, 0,00434 u. s. w. Wie nun diese Vielfachen zur Verwandlung der Logarithmen zu gebrauchen sind, werden folgende Beispiele vor Augen führen.

Wenn log. 124,7 = 2,09587, so folgt

wegen	2	=	4,6052
„	0,09	=	2072
„	0,005	=	115
„	0,0008	=	18
„	0,00007	=	2
log. nat.	124,7	=	4,8259,

wie weiter oben gefunden wurde.

Ist dagegen log. nat. 996,7 = 6,9045, so folgt

wegen	6	=	2,60577
„	0,9	=	39087
„	0,004	=	174
„	0,0005	=	22
daher log.	996,7	=	2,9986.

Tafel zur Verwandlung der Logarithmen.

1. Gemeine Logarithmen in natürliche Logarithmen umzusetzen.

Gegebene Ziffern.	Für die Ganzen.	Für die Dezimalziffern.				
		1	2	3	4	5
1	2,3026	0,2303	0,0230	0,0023	0,0002	0,0000
2	4,6052	0,4605	0,0461	0,0046	0,0005	0,0000
3	6,9078	0,6908	0,0691	0,0069	0,0007	0,0001
4	9,2103	0,9210	0,0921	0,0092	0,0009	0,0001
5	11,5129	1,1513	0,1151	0,0115	0,0012	0,0001
6	13,8155	1,3816	0,1382	0,0138	0,0014	0,0001
7	16,1181	1,6118	0,1612	0,0161	0,0016	0,0002
8	18,4207	1,8421	0,1842	0,0184	0,0018	0,0002
9	20,7233	2,0723	0,2072	0,0207	0,0021	0,0002

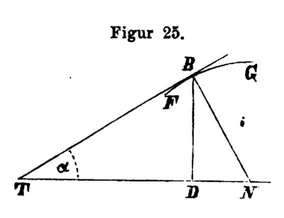
2. Natürliche Logarithmen in gemeine Logarithmen umzusetzen.

Gegebene Ziffern.	Für die Ganzen.	Für die Dezimalziffern.				
		1	2	3	4	5
1	0,43429	0,04343	0,00434	0,00043	0,00004	0,00000
2	0,86859	0,08686	0,00869	0,00087	0,00009	0,00001
3	1,30288	0,13029	0,01303	0,00130	0,00013	0,00001
4	1,73718	0,17372	0,01737	0,00174	0,00017	0,00002
5	2,17147	0,21715	0,02171	0,00217	0,00022	0,00002
6	2,60577	0,26058	0,02606	0,00261	0,00026	0,00003
7	3,04006	0,30401	0,03040	0,00304	0,00030	0,00003
8	3,47436	0,34744	0,03474	0,00347	0,00035	0,00003
9	3,90865	0,39087	0,03909	0,00391	0,00039	0,00004

Kurven.

Allgemeine Kurvenlehre.

Figur 25.



Ist für rechtwinklige Coordinaten

$$y = f\,x,$$

so ist, Figur 25:

die Subtangente

$$D\,T = \frac{f\,x}{f'\,x} = \frac{y}{\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)},$$

die Tangente

$$B\,T = \frac{f\,x}{f'\,x} = \sqrt{1 + (f'\,x)^2}$$

$$= \frac{y}{\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)} \sqrt{1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2},$$

$$\text{tang.}\,\alpha = \frac{y}{\text{subtang.}} = \frac{d\,y}{d\,x} = f'\,x.$$

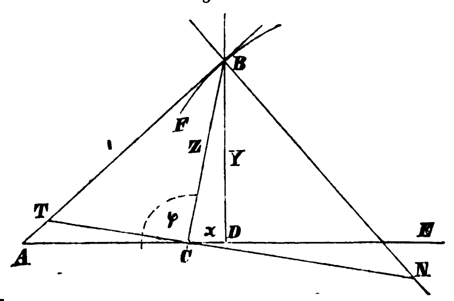
Die Subnormale.

$$DN = fx \cdot f'x = y \cdot \frac{dy}{dx},$$

Die Normale.

$$BN = fx\sqrt{1 + (f'x)^2},$$
$$= y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Figur 26.



Die Polargleichung.

$$z = f\varphi.$$

Ist für die Coordinatengleichung:

$CD = x$ und $DB = y$, Figur 26,

so ist:

$$\sphericalangle BCA = \varphi,$$
$$CB = z,$$
$$TN \perp CB.$$

Die Subtangente.

$$C\,T = z^2 : \frac{d\,z}{d\,\varphi},$$

$$\cot.\,C\,B\,T = \frac{d\,z}{d\,\varphi} : z.$$

Die Tangente.

$$B\,T = \frac{z}{\left(\frac{d\,z}{d\varphi}\right)} \sqrt{z^2 + \left(\frac{d\,z}{d\varphi}\right)^2}.$$

Die Subnormale.

$$C\,N = \frac{d\,z}{d\varphi}.$$

Die Normale.

$$B\,N = \sqrt{z^2 + \left(\frac{d\,z}{d\varphi}\right)^2}.$$

Ist $A\,D = x$, $B\,D = y$, $A\,E = a$, $E\,C = b$, $B\,C$ der Krümmungshalbmesser $= r$, so ist, Figur 27:

$$r = \pm \frac{\left[1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2\,y}{d\,x^2}\right)},$$

$$a = x - \frac{1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2}{\left(\frac{d^2\,y}{d\,x^2}\right)} \cdot \frac{d\,y}{d\,x},$$

$$b = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2 y}{dx^2}}.$$

Eine Gleichung zwischen a und b also, ohne x und y, und deren Differenziale gibt für jede besondere Kurve die Gleichung für die Evolute.

Figur 27.

Für $r = \pm \infty$ erhält man x und y entweder für einen Wendepunkt oder eine Spitze; einen Wendepunkt, wenn sowohl für $x + x'$ als auch $x - x'$ mögliche Grössen für x entstehen, eine Spitze, wenn für $x + x'$ oder für $x - x'$, y unmöglich wird.

Rektifikationsformel.

Länge des Bogens:

$$\lambda = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx + \text{Const.}$$

Quadraturformel.

Grösse der von einem Kurvenstücke, den beiden Endordinaten und dem Abscissenstücke eingeschlossenen Ebene:

$$F = \int y\,dx + \text{Const.}$$

Oberfläche,

welche aus der Umdrehung eines Kurvenstückes um die Abscisse entsteht:

$$T = 2\pi \int y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx + \text{Const.}$$

Kubaturformel.

Grösse des Körpers zwischen einer krummen Oberfläche und die beiden parallelen Endflächen:

$$K = \int f x\,dx + \text{Const.},$$

wo fx die zu y gehörige Endfläche ist.

Körper

aus der Umdrehung einer Kurve um die Abscissenaxe, von beiden Endkreisflächen eingeschlossen:

$$K = \pi \int y^2\,dx + \text{Const.}$$

Der Kreis.

I. Mittelpunktsgleichung, Figur 28:

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

oder:

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1.$$

Daraus:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

II. Scheitelgleichung aus A:

Figur 28.

$$y^2 = x(2r - x),$$

daraus:

$$y = \sqrt{x(2r - x)},$$

$$x = r - \sqrt{r^2 - y^2},$$

$$r = \frac{1}{2}\left(x + \frac{y^2}{x}\right) = \frac{x^2 + y^2}{2x}.$$

Ferner ist:

$$\text{tang.}\ \frac{\varphi}{2} = \frac{x}{y},$$

$$r = \frac{y}{\sin.\ \varphi}.$$

Bezeichnet z die Sehne A B, so ist:

$$z = 2r \cos.\ \psi,$$

$$z^2 = 2rx,$$

$$\pi = 3{,}14159265359,$$

$$\log.\ \pi = 0{,}4971499.$$

$57^0\ 17^3/_4{}'$ ist der dem Radius gleiche Kreisbogen. Bogenlänge und Inhalt siehe Längen- und Flächentafel.

Die Ellipse.

Grosse Halbaxe = a; kleine Halbaxe = b.

I. Mittelpunktsgleichung, Figur 29:

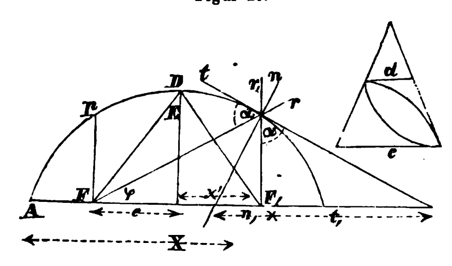
$$\frac{x_{,}^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;\ y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_{,}^2).$$

II. Polargleichung aus F:

$$r = p + e\,x = \frac{p}{1 - e \cos. \varphi},$$

worin $\varphi < 1$.

Figur 29.



III. Gleichung aus A:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2\,a\,x - x^2) = \frac{c\,d}{4\,a^2}(2\,a\,x - x^2),$$

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{2\,a\,x - x^2}.$$

Exzentrizität:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = a \sin. E.$$

Sind F und F, die Brennpunkte, so ist:

$$F\,D = F_{\prime}\,D = a.$$

Die Ordinate in F ist:

$$p = a\left(1 - \frac{e^2}{a^2}\right) = \frac{b^2}{a},$$

Parameter $= 2\,p,$

Radiusvektor: $r = (a^2 + e\,x_,) \cdot \frac{1}{a}$,

$$r_, = (a^2 - e\,x_,) \cdot \frac{1}{a},$$

$$r + r_, = 2\,a,$$

$$r = \frac{b^2}{a + e \cos.\,\varphi}.$$

Länge der Tangente: $t = \frac{a\,y}{b\,x_,} \sqrt{a^2 - e^2\,x_,^2}$,

„ „ Subtang.: $t_, = \frac{a^2}{x_,} - x_,$,

„ „ Normale: $n = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - e^2\,x_,^2}$,

„ „ Subnorm.: $n_, = \frac{b^2}{a^2}\,x_,$.

Krümmungshalbmesser: $\varrho = \frac{(r\,r_,)^{3/2}}{a\,b}$.

Für Punkt A ist: $\varrho_1 = \frac{b^2}{a}$,

„ „ D „ $\varrho_2 = \frac{a^2}{b}$.

n halbirt den ∢ zwischen r und $r_,$, t bildet mit r und $r_,$ die gleichen ∢ α und $\alpha_,$.

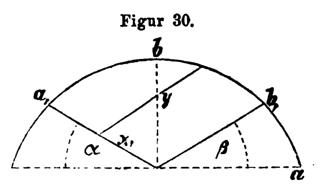
Conjugirte Durchmesser ($a_,$ und $b_,$) sind solche, für welche als Coordinatenaxen die Gleichung der Ellipse:

$$\frac{x_,^2}{a_,^2} + \frac{y^2}{b_,^2} = 1$$

wird.

Die Tangenten an den Enden eines conjugirten Durchmessers sind $\parallel$ dem andern. (Figur 30).

Figur 30.



Aus obiger Gleichung folgt:

$$y^2 = \frac{b_{,}^2}{a_{,}^2}(a_{,}^2 - x_{,}^2).$$

Ferner ist:

$$a_{,}^2 + b_{,}^2 = a^2 + b^2,$$

$$a_{,} b_{,} \sin. (\alpha + \beta) = a\, b,$$

$$\frac{b^2}{a^2} = \text{tang. } \alpha \text{ tang. } \beta.$$

Die Ordinaten des mit der grossen Halbaxe um den Mittelpunkt der Ellipse beschriebenen Kreises verhalten sich zu jenen der Ellipse:

$$= a : b.$$

Wenn x und y; $x_{,}$ $y_{,}$ die Ordinaten zu den Endpunkten zweier conjugirter Durchmesser sind, so ist:

$$x^2 + x_{,}^2 = a^2,$$

$$y^2 + y_{,}^2 = b^2,$$

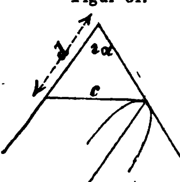
$$y : y_{,} = x_{,} : x.$$

Längen und Inhalt siehe „Längen- und Flächentafel“.

Die Parabel. (Figur 31 und 32.)

Parameter:
$$p = \frac{c^2}{d} = 2\,c\,\sin.\,\alpha.$$

Figur 31.



Scheitelgleichung: $y^2 = p\,x$,

Polargleichung: $r = x + \frac{p}{4}$,

$$= \frac{{}^1/_2\,p}{1 + \cos.\,\varphi}.$$

Gleichung für x, y, als Axen:

$$y_{,}^2 = p_{,}\,x_{,},$$

oder:

$$y_{,}^2 = \frac{p}{\sin.\,\alpha^2} \cdot x_{,} = \frac{4\,z^2 + p^2}{p}\,x_{,}.$$

Wenn F der Brennpunkt, so ist:

$$n = \frac{p}{4};\ m = \frac{p}{2};$$

Trägt man an eine Abscisse x den Parameter $p = N\,M$ an und beschreibt einen Halbkreis über A M, so ist dessen Radius:

$$R = y.$$

Länge der Tangente: $= \sqrt{4\,x^2 + y^2}$,

„ „ Subtang.: $= \frac{2\,y^2}{p} = 2\,x$,

„ „ Normale: $= \sqrt{{}^1/_4\,p^2 + y^2}$,

„ „ Subnorm.: $= {}^1/_2\,p$.

$$\sphericalangle\,\alpha = \sphericalangle\,\alpha_{,},$$

$$\text{tang.}\,\alpha = \frac{p}{2\,y} = \frac{y}{2\,x}.$$

Krümmungshalbmesser:

$$\varrho = \sqrt{\frac{(4x + p)^3}{4p}}.$$

Für den Scheitel A:

$$\varrho = {}^1/_2\, p.$$

Ordinaten des Mittelpunktes vom Krümmungskreise:

$$x = 3x + {}^1/_2\, p,$$

$$y = \frac{4x^2}{y}.$$

Die Leitlinie Y Y steht $\perp$ auf X X. Ihr Abstand von Scheitel A ist:

$$= \frac{p}{4}.$$

Dabei ist:

$$v = r = x + \frac{p}{4}.$$

Der mit der Axe X X ‖ Durchmesser X, X, halbirt alle zu der Tangente Y, ‖ Sehnen.

Bogenlänge A D:

$$s = \frac{1}{4x}\left[2x\sqrt{y^2 + 4x^2} + y^2 \ln \frac{2x + \sqrt{y^2 + 4x^2}}{y}\right]$$

auch:

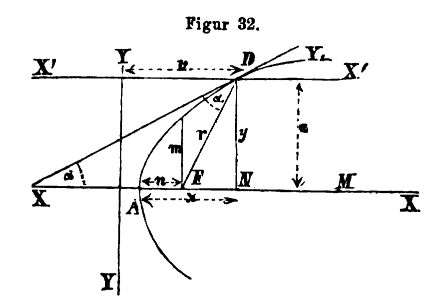
$$s = \frac{1}{2}\sqrt{2x(p + 2x)} + \frac{p}{2} \ln \left(\sqrt{\frac{2x}{p}} + \sqrt{1 + \frac{2x}{p}}\right).$$

Wenn $\frac{x}{y}$ ein kleiner Bruch annähernd:

$$s = y\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{x}{y}\right)^4\right].$$

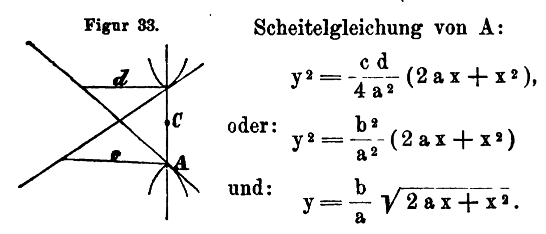
Die übrigen Längen, Flächen und körperlichen Inhalte siehe „Längen-, Flächen- etc. Tafeln“.

Figur 32.



Die Hyperbel. (Figur 33 und 34.)

Figur 33.



Scheitelgleichung von A:

$$y^2 = \frac{c\,d}{4\,a^2}(2\,a\,x + x^2),$$

oder:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2\,a\,x + x^2)$$

und:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{2\,a\,x + x^2}.$$

Mittelpunktsgleichung von C:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x,^2 - a^2),$$

oder:

$$\frac{x,^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Polargleichung von F:

$$r = \frac{b^2}{a + e\cos.\varphi},$$

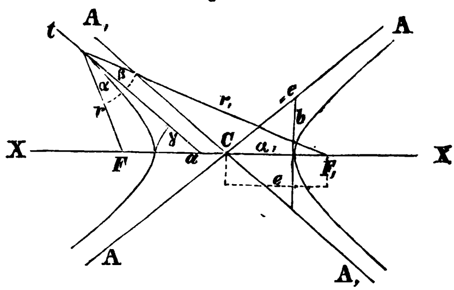
$$e = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$b^2 = \frac{c\,d}{4},$$

$$r = \frac{e\,x_{,}}{a} - a;\ r_{,} = \frac{e\,x_{,}}{a} + a,$$

$$r_{,} - r = 2\,a.$$

Figur 34.



Krümmungshalbmesser:

$$\varrho = \frac{(r\,r_{,})^{3/2}}{a\,b},$$

Im Scheitel: $$\varrho = \frac{b^2}{a}.$$

Die Tangente t halbirt den ∢ zwischen r und $r_{,}$ daher:

$$\sphericalangle\,\alpha = \sphericalangle\,\beta.$$

Der Winkel $\alpha_{,}$ den die Asymptoten A und $A_{,}$ mit der Axe X bilden, ist bestimmt durch die Gleichung:

$$\text{tang.}\ \alpha_{,} = \frac{b}{a}.$$

Bei der gleichseitigen Hyperbel ist:

$$b = a \text{ und tang. } \alpha_{,} = 1,$$

$$\alpha_{,} = 45^{0}.$$

Bezieht man die Hyperbel auf ihre Asymptoten und bezeichnet die Abscissen mit u, die Ordinaten mit v, so ist:

$$u \cdot v = \frac{a^2 + b^2}{4} = {}^1/_4\, e^2 = p^2.$$

p heisst die Potenz der Hyperbel.

Länge der Tangente t: $= \frac{y}{b\, x_{,}} \sqrt{e^2 x_{,}^2 - a^4},$

„ „ Subtangente: $= \frac{x_{,}^2 - a^2}{x_{,}},$

$$= \frac{2\, a\, x + x^2}{a + x},$$

$$= \frac{a^2 y^2}{b^2 x_{,}},$$

„ „ Normale: $= \frac{b}{a^2} \sqrt{e^2 x_{,}^2 - a^4},$

„ „ Subnormale: $= \frac{b^2}{a^2} x_{,} = \frac{b^2}{a^2} (a + x).$

Für den von t mit X X gebildeten ∢ γ ist (Figur 35):

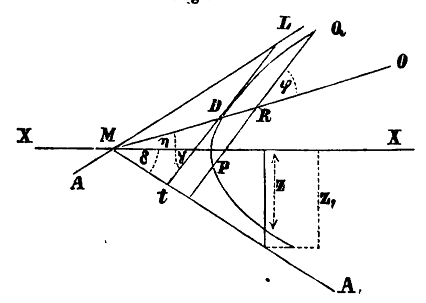
$$\text{tang.}\ \gamma = \frac{b^2 \cdot x_{,}}{a^2\, y} = \frac{b^2}{a^2\, y} (a + x),$$

Für den Mittelpunkt des Krümmungskreises sind die auf den Mittelpunkt der Hyperbel bezogenen Coordinaten:

$$\text{Abscisse} = \frac{a^2 + b^2}{a^4} \cdot x_,^3,$$

$$\text{Ordinate} = \frac{a^2 + b^2}{b^4} \cdot y^3.$$

Figur 35.



Jede durch den Mittelpunkt M der Hyperbel gezogene Gerade M O ist ein Durchmesser derselben und jede mit der Tangente D t ‖ Sehne P Q wird durch den Durchmesser (in R) halbirt.

Die Tangente D t bis zu den Asymptoten verlängert, wird durch den Berührungspunkt D halbirt.

Ist:

$$D\,R = x_,;\ M\,R = u_,;\ R\,Q = R\,P = y_,;$$

$$M\,D = a_,;\ D\,L = e_,,$$

so ist:

$$y_,^2 = \frac{e_,^2}{a_,^2} u_,^2 - e_,^2,$$

$$y_{,}^{2} = \frac{e_{,}^{2}}{a_{,}^{2}} (u_{,}^{2} - a_{,}^{2}),$$

$$y_{,}^{2} = \frac{c_{,}^{2}}{a_{,}^{2}} (2a_{,} x_{,} + x_{,}^{2}).$$

M D und D L sind coordinirte Durchmesser. Es ist für jeden Punkt der Hyperbel, wie D:

$$a_{,} c_{,} \sin. \varphi = a_{,} c_{,} \sin. (\gamma - \eta) = a\, b,$$

$$a_{,}^{2} - e_{,}^{2} = a^{2} - b^{2},$$

$$\text{tang.}\, \eta = \frac{b^{2}}{a^{2}} \cot. \gamma.,$$

$$\text{tang.}\, \varphi = \frac{a^{2} \sin. \gamma^{2} - b^{2} \cos. \gamma^{2}}{(a^{2} + c^{2}) \sin. \gamma \cos. \gamma}.$$

Verlängert man eine Ordinate z bis in die Asymptote A, so ist:

$$z_{,}^{2} - z^{2} = b^{2},$$

oder:

$$z_{,} - z = \frac{b^{2}}{z' + z} = \frac{a\, b}{x + \sqrt{x^{2} - a^{2}}}.$$

Flächen- und Körperräume siehe die betreffenden Tafeln.

Die Cycloïde. (Figur 36.)

Gleichung von A aus:

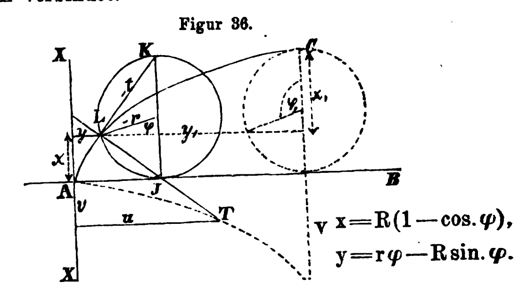
$$y = r \text{ arc.} \left(\cos. = \frac{r - x}{r}\right) - \sqrt{2 r x - x^{2}}.$$

Gleichung von C aus:

$$y_{,} = r \text{ arc.} \left(\cos. = \frac{r - x_{,}}{r}\right) + \sqrt{2 r x_{,} - x_{,}^{2}}.$$

Die Tangente t für Punkt L findet man, indem man K und L verbindet.

Figur 36.



$$x = R(1 - \cos.\varphi),$$
$$y = r\varphi - R\sin.\varphi.$$

Der Krümmungshalbmesser für L ist:

$$\varrho = 4\,r\,\sin.\frac{\varphi}{2} = 2\,\overline{LJ},$$

für Punkt A: $\varrho = 0,$

für Punkt C: $\varrho = 4\,r.$

Gleichung für die Evolute der Cycloide:

$$u = r\,\text{arc.}\left(\cos. = \frac{r - v}{r}\right) + \sqrt{2\,r\,v - v^2}.$$

Die Evolute ist daher mit der Cycloide congruent.

Längen-, Flächen- und Körperräume siehe die Tabelle.

Die verkürzte Cycloide. (Figur 37.)

CD Erzeugungskreis, c der beschreibende Punkt in der Axe.

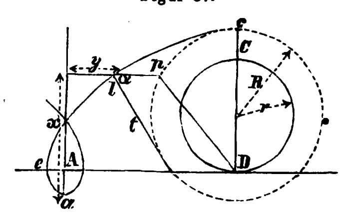
Gleichung von A aus:

$$y = r\,\text{arc.}\left(\cos.\,\frac{R - x}{R}\right) = \sqrt{2\,R\,x - x^2}.$$

Die Normale t für Punkt l ist ∥ p D.
Krümmungshalbmesser:

$$\varrho = \frac{(R^2 + r^2 - 2\,r\,R\cos.\alpha)^{3/2}}{R\,(R - r\cos.\varphi)}.$$

Figur 37.



Für Punkt c: $\overline{Ae} = -r\varphi + R\sin.\varphi,$

$$\varrho = \frac{(R + r)^2}{R},$$

Für Punkt a: $\overline{Aa} = R - r,$

$$\varrho = \frac{(R - r)^2}{R}.$$

Für Punkt e: $\cos.\varphi = \frac{r}{R}.$

$$\varrho = \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Die gestreckte Cycloide. (Figur 38.)

C D der erzeugende Kreis, c der beschreibende Punkt in der Axe, D t Tangente an Kreis c d:

$$x = r - r\cos.\varphi \qquad y = r\varphi - r\sin.\varphi.$$

Gleichung von A aus:

$$y = R \operatorname{arc.}\left(\cos. = \frac{r - x}{r}\right) - \sqrt{2\,r\,x - x^2}.$$

Die Normalen n und n, sind $\parallel \overline{pD}$. Die Linie f e $\parallel$ zu a d von dem Berührungspunkt F der Tangente $\overline{tD}$ gezogen, gibt den Wendepunkt e.

Figur 38.

Krümmungshalbmesser für l:

$$\varrho = \frac{(r^2 - R^2 - 2\,r\,R\cos\varphi)^{3/2}}{r\,(r - R\cos.\varphi)}.$$

Für Punkt a:

$$\varrho = \frac{(R - r)^2}{r}.$$

Für den Scheitel c:

$$\varrho = \frac{(R + r)^2}{r}.$$

Für den Punkt e:

$$\varrho = \pm\infty,$$

$$\cos.\varphi = \frac{r}{R}.$$

Hypocycloide. (Figur 39.)

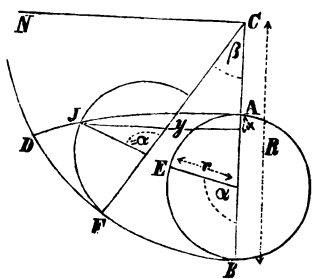
B D sei der Grundkreis, A B der Erzeugungskreis, α der Wälzungswinkel und Bogen E B = F B, so ist:

$$r\,\alpha = R\,\beta,$$

$$x = (R - r)\cos.\beta - r\cos.(\alpha - \beta) - (R - 2r),$$

$$y = (R - r)\sin.\beta - r\sin.(a - \beta).$$

Figur 39.



Für 2 r = R entsteht für jeden Werth von α:

$$x = 0;\ y = 2r\sin.\frac{\alpha}{2},$$

d. h., die Hypocycloide wird eine Gerade C N, die mit B C normal ist.

Die Epicycloide. (Figur 40.)

Ist B D der Grundkreis, A E B der Erzeugungskreis, Bogen B D = A E B, Bogen B F = B E = H J, so ist:

$$x = R + 2r - (R + r)\cos.\psi - r\cos.(\varphi + \psi),$$

$$= (R + r)\sin.\psi + r\cos.(\varphi + \psi),$$

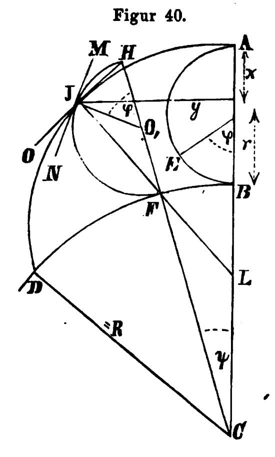
$$\psi = \frac{r}{R}\varphi,$$

also:

$$x = R + 2r - (R + r)\cos.\frac{r}{R}\varphi - r\cos.\frac{R + r}{R}\varphi.$$

$$y = (R + r)\sin.\frac{r}{R}\varphi + r\cos.\frac{R + r}{R}\cdot\varphi.$$

Figur 40.



Der ∢, den die Tangente O J in J mit der Abscisse A C bildet, ist:

$$= \frac{\pi}{2} - \left(\psi + {}^1/_2\,\varphi\right),$$

daher die Sehne H J zugleich die Tangente.

Länge der Subtangente:

$$= \text{tang.}\,(\psi + {}^1/_2\,\varphi).$$

Länge der Subnormale:

$$= y\cot.\,(\psi + {}^1/_2\,\varphi).$$

Krümmungshalbmesser bei J:

$$\varrho = 4r\cdot\frac{R + r}{R + 2r}\cos.\frac{\varphi}{2}.$$

Ist M N die Kreistangente in J, so ist:

$$\sphericalangle F J N = H J O, = \frac{\pi - \varphi}{2}.$$

Bogenlänge:

$$A J = 4\frac{r}{R}(R + r)\sin.\frac{\varphi}{2},$$

für:

$$\varphi = \pi,\ \text{ist}\ A J D = 4\frac{r}{R}(R + r).$$

Die Evolvente. (Figur 41.)

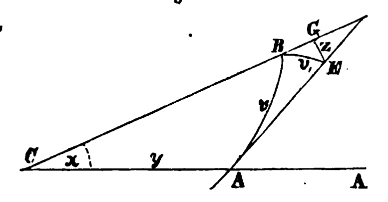
Ist A B das Stück einer beliebigen Kurve, deren Gleichung vom Pol C aus:

$$y = \varphi x,$$

A C die Polaxe $\measuredangle$ A C B = x, die Abscisse = B C und y die Ordinate, so ist die Länge:

$$A B = v = \int \sqrt{y^2 + (d y)^2}\, d x,$$

Figur 41.



Ist B E die Evolvente von A B, also A E die Tangente in A = v, die Normale E G auf C B = z; C G = u, so ist:

$$u = y \cos. x + v \sin. x,$$

$$z = y \sin. x - v \cos. x,$$

die Länge:

$$B E = v_{,} = \int v\, d x,$$

der Raum:

$$A B E = {}^1\!/_2 \int v^2\, d x.$$

Ist A B ein Kreisbogen, so ist für jedes x:

$$A C = r$$

und:

$$A B = v = r x,$$

daher die Länge der Evolvente:

$$A E = \int r x\, d x = {}^1\!/_2\, r x^2,$$

wobei die Tangente:

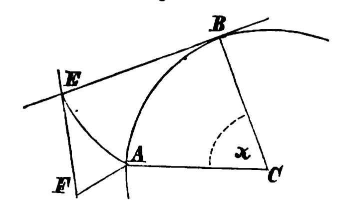
$$BE = \text{Bogen } AB = r\,x$$

ist.

Wickelt man weiter AE von A aus ab, so ist, wenn EF die Tangente in E und $= AE$ ist, Bogen:

$$AF = \int {}^1/_2\, r\, x^2 = {}^1/_6\, x^3\, r. \quad \text{(Figur 42.)}$$

Figur 42.



$$\text{Ebene: } ABC = {}^1/_2 \int (r\,x)^2 = {}^1/_6\, r^2 \cdot x^3,$$

$$\text{Ebene: } AEF = {}^1/_2 \int ({}^1/_6\, r^2\, x^3) = {}^1/_{40}\, r^2\, x^5.$$

Die Konchoide oder Muschellinie. (Figur 43.)

Entstehung. Man ziehe x′ x und B C senkrecht zu einander, mache A B und A D $= a$, ziehe die beliebige Linie C Q und mache R Q $=$ R N $= a$, so sind N und Q Kurvenpunkte.

$$PR = \frac{x\,y}{b+y};\quad MR = \frac{x'\,y}{b-y}$$

$$PQ^2 + PR^2 = QR^2,$$

$$MN^2 + MR^2 = NR^2,$$

also:

$$y^2 + \frac{x^2 y^2}{(b + y)^2} = a^2$$

und:

$$y^2 + \frac{x'^2 y^2}{(b - y)^2} = a^2.$$

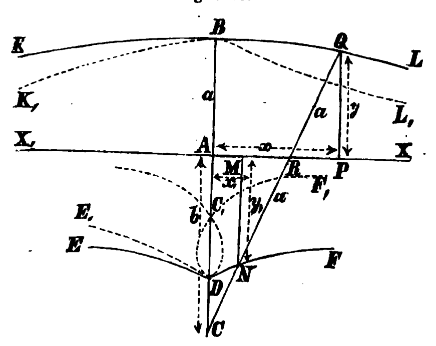
Gleichung für die obere Konchoide:

$$y^4 + 2by^3 + (x^2 + b^2 - a^2)y^2 - 2a^2by - a^2b^2 = 0,$$

für die untere:

$$y^4 - 2by^3 + (x^2 + b^2 - a^2)y^2 + 2a^2by - a^2b^2 = 0.$$

Figur 43.



Liegt c in D, so hat man für beide Kurven:

$$y^4 \pm 2ay^3 + x^2y^2 \mp 2a^3y - a^4 = 0.$$

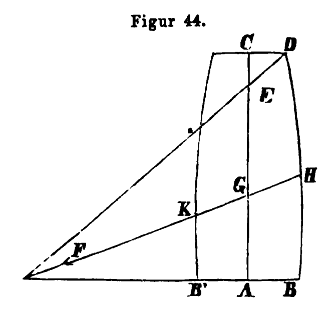
Man erhält dann die Kurven:

K, B und D E'.

Liegt der Pol c in C', so entsteht B L' und D C' F' und bei C' ein Knoten.

Ist C D der obere, A B der untere Radius einer Säule, so mache man D E = A B und ziehe F E D. Für jede andere Linie F H mache man G H = K G = D E. (Figur 44.)

Figur 44.

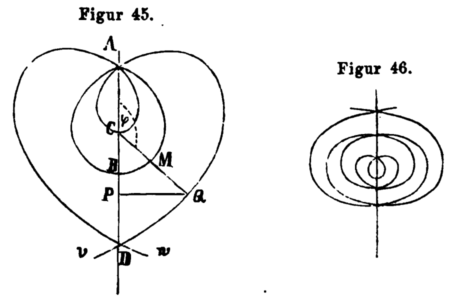


Neoide. (Figur 45 und 46.)

Entstehung. Man theilt den Halbkreis A M B in n gleiche Theile und die Linie B D gleichfalls in n gleiche

Figur 45.

Figur 46.



Theile, zieht C Q beliebig und macht M Q ebensoviel Theile von B D lang, als der Bogen A M Theile enthält. Es muss also stets die Proportion stattfinden:

$$\text{arc. } A M : \text{arc. } A M B = M Q : B D,$$

also C Q stets gleich sein:

$$r + \frac{a\varphi}{\pi}.$$

Es ist also:

$$C P = x = \left(r + \frac{a\varphi}{\pi}\right) \cos.\varphi,$$

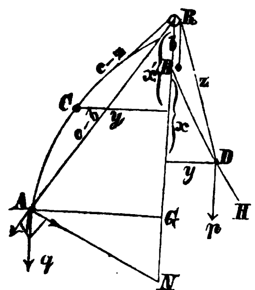
$$P Q = y = \left(r + \frac{a\varphi}{\pi}\right) \sin.\varphi.$$

Die Neoide bildet auf der unbegrenzten Gerade A D unendlich viele Knoten.

Die Gleichgewichtskurve. (Figur 47 und 48.)

A R sei die gegebene Kurve, ihre Gleichung sei $y' = f(x')$, B H die gesuchte Gleichgewichtskurve, x und y ihre Coordinaten, R N Abscissenaxe, A N Normale, G N Subnormale = n, R G halbe Axe = a, die Länge des Fadens = c, das Stück R B desselben = b, g die Last, p die Kraft.

Figur 47.



Wenn g bei A steht und p bei B hängt, so ist:

$$p = \frac{c - b}{a + n} \cdot g.$$

Es sei nun eine Bewegung erfolgt und g daher bei C, p bei D, so ist der Weg der Last

$$= a - x',$$

und der Weg der Kraft = x, also:

$$1.\quad x = \frac{a+n}{c-b}(a - x') \text{ und } x' = a - \frac{c-b}{a+n}x,$$

Nun wäre:

$$y^2 = z^2 - (x+b)^2,$$

und:

$$(c-z)^2 = x'^2 + y'^2.$$

Berechnet man hieraus z, so erhält man:

$$2.\qquad y^2 = (c - \sqrt{x'^2 + y'^2})^2 - (b+x)^2.$$

Substituirt man den Werth von x, so kommt:

$$3.\quad y = \sqrt{(c - \sqrt{x'^2 + y'^2})^2 - \left(b + \frac{a+n}{c-b}(a - x')\right)^2}.$$

Man hat also folgende Bestimmungsgleichungen:

$$\text{I.}\quad p = \frac{c-b}{a+n} \cdot g.$$

$$\text{II.}\quad x = \frac{a+n}{c-b}(a - x').$$

$$\text{III.}\quad y = \sqrt{(c - \sqrt{x'^2 + y'^2})^2 - \left(b + \frac{a+n}{c-b}(a - x')\right)^2}.$$

$$\text{IV.}\quad y' = f(x').$$

Gleichgewichtskurve für eine Kreisquadrate. Hiefür ist:

$$n = 0,\ c - b = a\sqrt{2},\ \frac{a+n}{c-b} = {}^1\!/_2\sqrt{2},$$

$$y'^2 = 2ax' - x'^2, \text{ also } y'^2 + x'^2 = 2ax'.$$

Durch Substitution in die allgemeine Gleichung erhält man:

$$\text{I.}\quad p = g\sqrt{2},$$

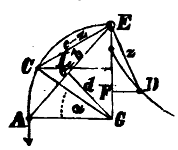
$$\text{II.}\quad x = {}^1\!/_2(a - x')\sqrt{2},$$

$$\text{III.}\quad y = \sqrt{(c - \sqrt{2ax'})^2 - [b + {}^1\!/_2(a - x')\sqrt{2}]^2}.$$

Will man eine Gleichung unter x und y, so drücke man x' in Funktion von x aus, dann ist:

$$\text{IV.}\quad y = \sqrt{\left(c - \sqrt{2a^2 - 2ax\sqrt{2}}\right)^2 - (b+x)^2}.$$

Figur 48.



Will man die Gleichung durch Kreisfunktionen ausdrücken, so ziehe man das Perpendikel d von G auf E A, so hat man:

$$d = \tfrac{1}{2} a \sqrt{2}$$

und wenn α den Erhebungswinkel der Last g bezeichnet, so ist:

$$a - x' = a \sin. \alpha$$

und:

$$\text{I.}\quad x = \tfrac{1}{2} a \sqrt{2} \sin. \alpha = d \sin. \alpha,$$

$$\text{II.}\quad y = \sqrt{(c - a\sqrt{2} \cos. \alpha)^2 - (b + \tfrac{1}{2} a \sqrt{2} \sin. \alpha)^2}.$$

Mittelst der Formel:

$$d \sin. \alpha = x$$

und der Grösse z lässt sich $\triangle$ E T D und mithin die ganze Kurve leicht konstruiren.

Die Kurve ist eine Epicycloide.

Logarithmische Linie. (Figur 49.)

Logarithmische Linie ist jede Kurve, deren Ordinaten eine geometrische Reihe bilden, während die Abscissen nach einer arithmetischen Reihe fortschreiten. Für die Abscissen a, 2 a, 3 a u. s. w. sind die Ordinaten:

$$b,\ c,\ \frac{c^2}{b},\ \frac{c^3}{b^2} \ldots$$

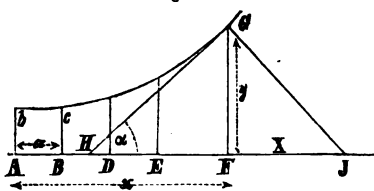
Gleichung von A aus, wenn $x = n a$:

$$y = \frac{c^n}{b^{n-1}} = b \left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{x}{a}}.$$

Für $b = 1$ ist:

$$y = c^{\frac{x}{a}};\ y^a = c^x;$$
$$a \log. y = x \log. c;$$
$$a : x = \log. c : \log. y.$$

Figur 49.



Ist G H die Tangente in G, so ist:

$$\text{tang. } \alpha = y \frac{\ln \cdot c}{a}.$$

Subtang.: $F H = \frac{a}{\ln \cdot c}$,

(constant für jeden Punkt der Kurve).

Subnorm.: $F J = y^2 \frac{\ln \cdot c}{a}$.

Für den Mittelpunkt der Krümmung:

Abscisse: $x_{,} = x - \frac{a^2 - y^2 (\ln c)^2}{a \ln \cdot c}$.

Ordinate: $y_{,} = y + \frac{a^2 + y^2 (l\,n \cdot c)^2}{y\,(l\,n \cdot c)^2}$,

Halbmesser: $\varrho = \frac{[a^2 + y^2 (l\,n \cdot c)^2]^{3/2}}{y\,(l\,n \cdot c)^2}$.

Spirallinie. (Figur 50.)

Hat eine Kurve die Coordinatengleichung:

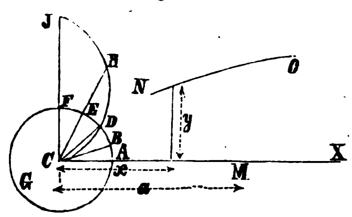
$$y = \varphi\, x,$$

ist C der Anfangspunkt der Abscissen, ist um C der Kreis F G mit dem Halbmesser = 1 beschrieben und sind von A aus die Bogen:

$$A\,B,\ A\,D,\ A\,E,\ A\,F = 2\,\pi\,\frac{\varphi\, x}{\varphi\, a}$$

abgetragen, so erhält man die Spirale, wenn man für a eine beliebige Länge C M annimmt, für x nach und nach

Figur 50.



die Werthe 0, 1, 2, 3 u. s. w. einsetzt, auf den Radien C B, C D, C E u. s. w. die Längen C = 0, C D = 1, C H = 2, C J = 3 als die jedesmaligen Werthe von x aufträgt, und die Punkte C D H J verbindet.

Die Spirale führt ihren Namen nach der erzeugenden Kurve:

$$y = \varphi x.$$

Für $x = a$ entsteht:

$$v = 2\pi \frac{\varphi a}{\varphi a} = 2\pi.$$

Die Spirale hat eine ganze Windung gemacht und es entsteht die zweite Windung von:

$$x = a + 1 \text{ bis } x = 2a \text{ u. s. w.}$$

Archimedische Spirale.

Die erzeugende Kurve ist die gerade Linie:

$$y = \varphi x = b + c x,$$

$$v = \frac{b + c x}{b + c a} \cdot 2\pi.$$

Geht die gerade Linie durch den Anfangspunkt C, so ist:

$$b = 0 \text{ und } v = \frac{2x}{a}\pi.$$

$$x = -\frac{b}{c} + \frac{(b + c a)}{2\pi c} v.$$

Die Kurve ist identisch mit der Neoide.

Logarithmische Spirale.

Die erzeugende Kurve ist die logarithmische Linie:

$$y = \varphi x = c^{\frac{x}{a}},$$

also für die Spirale:

$$v = \frac{c^{\frac{x}{a}}}{c^{\frac{a}{a}}} 2\pi = 2\pi \frac{c^{\frac{x}{a}}}{c}$$

und:

$$c^{\frac{x}{a}} = \frac{c}{2\pi} \cdot v,$$

oder:

$$\ln \frac{v}{2\pi} = \frac{x}{a}.$$

Damit v nicht als log. gegeben wird, vertausche man x mit y, so ist:

$$x = c^{\frac{y}{a}},$$

$$\frac{y}{a} \log. c = \log. x,$$

woraus:

$$y = \varphi x = a \frac{\log. x}{\log. c},$$

mithin:

$$v = \frac{a \frac{\log. x}{\log. c}}{a \frac{\log. c}{\log. c}} \cdot 2\pi$$

$$= \frac{\log. x}{\log. c} \cdot 2\pi.$$

Flächen-, Schwerpunkts- und Längen-Tafel.

	Form.	Flächeninhalt F.
△ Umfang.		Null,
○ Bogen.		Null,
Kreis.		$F = r^2 \pi = 3{,}14159\ r^2$ $r = 0{,}5642 \sqrt{F}$,
Parabel.		$F = F_{,} = {}^2/_3\, x\, y$,

Schwerpunktslage.	Länge.
$z = \frac{b + c}{a + b + c} \cdot \frac{h}{2}$	Umfang = a + b + c.
Abstand vom Kreismittelpunkt: $z = \frac{r\,s}{b} = \frac{r \sin. \alpha}{\alpha}$	Wenn der Centriwinkel $= \beta^0$ ist, so ist der Bogen: $b = 0{,}017453\, \beta^0\, r.$
Schwerpunkt im Centrum	Umfang: $= 2\, r\, \pi = 6{,}28319\, r.$
$z = {}^3/_5\, x,$ $z_{,} = {}^3/_8\, y$	Bogen P A Q bei gedrückter Form — annähernd: $= 2\, y \left[1 + {}^8/_3 \left(\frac{x}{2\, y}\right)^2\right]$ vide Kurven.

	Form.	Flächeninhalt.
Ellipse.		$F = a\,b\,\pi$, $F = a\,b \cdot 3{,}14159$
△ Fläche.		$F = \frac{a\,h}{2}$, $F = \frac{x_1\,y_2 - x_2\,y_1}{2}$.
Parallelogr.		$F = a\,h$, $F = b\,a\,\sin.\,\alpha$.
Trapez.		$F = \frac{a_1 + a_2}{2}\,h$.

Schwerpunktslage.	Länge.
Schwerpunkt im Mittelpunkt.	Umfang: $= \pi(a+b)\left[1 + {}^1/_4\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + {}^1/_{64}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4 + {}^1/_{256}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^6 + \cdots\right].$
$z = {}^1/_3\, h\; z_, = {}^1/_3\, h_{,,}$ Abstand von einer Ebene, $z = (a + b + c)\, {}^1/_3$, wenn a, b, c die Abstände der Ecken.	Umfang: $s = a + b + c$, auch ist dann: $F = \sqrt{\frac{s}{2}\left(\frac{s}{2} - a\right)\left(\frac{s}{2} - b\right)\left(\frac{s}{2} - c\right)}.$
Im Durchschnittspunkt der Diagonalen.	
In der Halbirungslinie $a_1 a_2$: $z = \frac{a_2 + 2 a_1}{a_1 + a_2} \cdot \frac{h}{3}.$	

	Form.	Flächeninhalt.
Reguläres n Eck.		$F = \frac{1}{4}\, n\, s^2 \cot. \frac{180}{n}$, $F = n \cdot \frac{s\,h}{2}$.
	Irreguläres n Eck.	Man zerlege die Figur in Dreiecke, Trapeze etc., berechne deren Inhalt und summire ihn.
○ Ausschnitt.		$F = r^2 \frac{\beta}{2}$, $F = 0{,}008727\, r^2\, \beta^0$.
○ Abschnitt.		$F = \frac{r^2}{2} (\beta - \sin. \beta)$, $F = \frac{r^2}{2} (0{,}017453\, \beta^0 - \sin. \beta)$.
Halbkreis.		$F = 1{,}57080 \cdot r^2$.

Schwerpunktslage.	Länge.
Schwerpunkt im Mittelpunkt.	
Abstand von einer beliebigen Linie: $z = \frac{\text{Stat. Mom. d. Fläche}}{\text{Inhalt der Fläche}}.$	
$z = \frac{4}{3}\, r \frac{\sin. \frac{\beta}{2}}{\beta}.$	Bogenlänge bei gedrückter Form annähernd: $= s + \frac{8}{3} \cdot \frac{h^2}{s},$ Länge des Radius: $r = \frac{\frac{1}{4} s^2 + h^2}{2\, h}.$
$z = \frac{s^3}{12\, F},$ $z = \frac{4}{3}\, r \frac{\sin. \frac{\beta^3}{2}}{\beta - \sin. \beta}.$	
$z = 0{,}4244\, r,$ annähernd: $z = \frac{14}{33}\, r.$	

	Form.	Flächeninhalt.
Kreisringstücke.		$F = (r_1^2 - r_2^2)\frac{\beta}{2}$, $F = b\,r\,\beta$, wenn: $r = (r_1 + r_2)$ ist.
		$F = 3{,}14159\,(r_1^2 - r_2^2)$.
		$F = 1{,}57079\,(r_1^2 - r_2^2)$.
○ Abschn.		Annähernd: $F = 2\,h \cdot \frac{r_0 + 4\,r_1 + r_2}{6}$.
Elliptische Abschnitte.		Bezeichnet F_1 den entsprechenden Abschnitt im grossen Axenkreise, so ist: $F = \frac{b}{a} \cdot F_1$, oder: $F = \frac{a\,b}{2}\,(\beta - \sin.\,\beta)$.

Schwerpunktslage.	Länge.
$z = {}^4/_3 \cdot \frac{\sin.\frac{\beta}{2}}{\beta} \cdot \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2},$ $z = \frac{\sin.\frac{\beta}{2}}{\beta}\, r\left(2 + {}^1/_6 \frac{b^2}{r^2}\right).$	
Mitte der Figur.	
$z = \frac{4}{3\pi} \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r^2}.$	

	Form.	Flächeninhalt.
Parabelabschnitt.	Axe A.	$F = \frac{2}{3}\, h\, s \sin. \alpha$, $\overline{a\,b} \parallel A$ halbirt F.
Kettenlinie.		Siehe Theil II angewandte Mathematik.
Normaler Ausschnitt aus einer einzelnen Figur.		Man theile a in n gleiche Theile, wobei n eine gerade Zahl sein muss. Alsdann ist:
		$F = [h_0 + 4\,(h_1 + h_3 \cdots + h\,n-1) + 2\,(h_2 + h_4 + \cdots h_{n-2})]\,\frac{a}{3\,n}$.

Schwerpunktslage.	Länge.

Abstand von a:

$$z = \frac{a}{n} \cdot \frac{1 \cdot 4\,h_1 + 2 \cdot 2\,h_2 + 3 \cdot 4\,h_3 + \cdot 4 \cdot 2\,h_4}{h_0 + 4\,h_1 + 2\,h_2 + 4\,h_3 \cdots}.$$

Abstand von h_0:

$$z_1 = \frac{h_0^2 + 4\,h_1^2 + 2\,h_2^2 + 4\,h_3^2 + \cdot 2 \cdot h_4^2 \cdots}{h_0 + 4\,h_1 + 2\,h_2 + 4\,h_3 + 2\,h_4 \cdots}.$$

	Figur.	Flächeninhalt.
Cycloide.		Fläche m s p $= {}^2/_3\, r^2 \pi$.
Hyberbolische Abschnitte.	$\overline{OP} \parallel c$. $\overline{MK} = u$.	Fläche Q E P $= 2$ mal, Fläche E R P $= \frac{c}{a} \sin.\varphi \left[u \sqrt{u^2 - a^2} + a^2 \,\mathrm{lgn.}\, \frac{u - \sqrt{u^2 - a^2}}{a} \right]$.
		$= a\, c \left[\frac{u \sqrt{u^2 - a^2}}{a^2} + \mathrm{logn.}\, \frac{u - \sqrt{u^2 - a^2}}{a} \right]$.

Schwerpunktslage.	Länge.
	$\overline{am}$ = Bogen $\left\{\begin{array}{l} am \\ = \varphi, \end{array}\right.$ $\overline{ps} = 2r$ $\overline{ms} = r\pi$. Bogen n m: $= 4r\left(1 - \cos.\frac{\varphi}{2}\right)$. Bogen m p: $= 4r$.

	Figur.	Flächeninhalt.
Cycloide.		Fläche A L ν $= r^2 (^1/_2\, \varphi - 2 \sin.\, \varphi + ^1/_2 \sin.\, \varphi \cos.\, \varphi)$. Fläche A L M $= r^2 (\sin.\, \varphi - \varphi \cos.\, \varphi - ^1/_2\, \varphi + ^1/_2 \sin.\, \varphi \cos.\, \varphi)$. Fläche A D C L A $= ^3/_2\, \pi r^2$. Fläche A E C L A $= ^1/_2\, \pi r^2$. Fläche C L O $= r^2 (^1/_2\, \varphi' + \sin.\, \varphi' - \varphi' \cos.\, \varphi' - ^1/_2 \sin.\, \varphi' \cos.\, \varphi')$. Fläche C L Z $= ^1/_2\, r^2 (\varphi' - \sin.\, \varphi' \cos.\, \varphi')$.
Epicycloide.		Fläche A J D B $= \frac{\pi}{2} r^2 \left(3 + \frac{2\,r}{R}\right)$.

Schwerpunktslage.	Länge.
	Halbe Cycloide: $A L C = 4 r.$ Bogen: $L C = 2 K L,$ $= 2 C P.$
	Bogen: $A J D = \frac{4 r}{R} (R + r).$

	Figur.	Flächeninhalt.
Evolvente.	Entstehung siehe unter Kurven.	Längen- und Raum-Maasse siehe unter Kurven.

Körperinhalt, Flächen- und Schwerpunkts-Tafel.

	Form.	Umfläche F_1. Eine Endfläche F_2.
Dreiseitiges Prisma.		$F_1 = (a + b + c)\,l$, $F_2 = \frac{b\,h}{2}$.
Rechteckiges Prisma.		$F_1 = 2\,l\,(b + h)$, $F_2 = b\,h$.
Rhombisches Prisma.		$F_1 = 4\,l\sqrt{h^2 + \frac{b^2}{4}}$, $F_2 = b\,h$.
Sechs- und gleichseitiges Prisma.		$F_1 = 6\,l\,r$, $F_2 = 2{,}598\,r^2$.

Cubikinhalt.	Schwerpunktslage.
$= \frac{b\,h}{2} \cdot l.$	
$= b\,h\,l.$	In der Verbindungslinie der Schwerpunkte von den Endflächen. Abstand von denselben: $z = \frac{l}{2}$ für den Körper wie für den Mantel allein:
$= b\,h\,l.$	
$= 2{,}598\,l\,r^2.$	dito.

	Form.	Umfläche F_1. Eine Endfläche F_2.
Cylinder.		$F_1 = 2\,l\,r\,\pi$, $F_2 = r^2\,\pi$.
Würfel.		$F_1 = 4\,a^2$, $F_2 = a^2$.
[illegible]		$F_1 = l\,(a + b + c \cdots)$, F_2 nachzumessen.
[illegible]		$F_1 = l\,(a + b + c \cdots)$, F_2 nachzumessen.
[illegible]		$F_1 = {}^1/_2\,[(l_1 + l_2)\,a + (l_2 + l_3)\,b + (l_3 + l_1)\,c]$. Untere Fläche F_2 und obere Fläche F_3 als Dreieck zu berechnen.

Cubikinhalt.	Schwerpunktslage.
$= r^2 \pi l.$	Wie vor.
$= a^3.$	Wie vor.
$= F_2 l.$ $= F_2 l.$	Wie vor.
$= \frac{F_2 (l_1 + l_2 + l_3)}{3}.$	$z = \frac{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_1 l_2 + l_1 l_3 + l_2 l_3}{4 (l_1 + l_2 + l_3)}.$

	Form.	Umfläche F_1. Eine Endfläche F_2.
Cylinder.		$F_1 = 2\, l\, r\, \pi$, $F_2 = r^2 \pi$.
Würfel.		$F_1 = 4\, a^2$, $F_2 = a^2$.
Beliebiges schiefes oder gerades Prisma.		$F_1 = l\,(a + b + c \cdots)$, F_2 nachzumessen.
		$F_1 = l\,(a + b + c \cdots)$, F_2 nachzumessen.
Schief abgeschn. dreiseit. Prisma.		$F_1 = \frac{1}{2}\,[(l_1 + l_2)\,a + (l_2 + l_3)\,b + (l_3 + l_1)\,c]$. Untere Fläche F_2 und obere Fläche F_3 als Dreieck zu berechnen.

Cubikinhalt.	Schwerpunktslage.
$= r^2 \pi l.$	Wie vor.
$= a^3.$	Wie vor.
$= F_2 l.$ $= F_2 l.$	Wie vor.
$= \frac{F_2 (l_1 + l_2 + l_3)}{3}.$	$z = \frac{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_1 l_2 + l_1 l_3 + l_2 l_3}{4 (l_1 + l_2 + l_3)}.$

	Form.	Umfläche F_1. Eine Endfläche F_2.
Cylinder.	r, l	$F_1 = 2\,l\,r\,\pi$, $F_2 = r^2\,\pi$.
Würfel.	a, a, a, a	$F_1 = 4\,a^2$, $F_2 = a^2$.
Beliebiges schiefes oder gerades Prisma.	a, g, f, e, b, c, d, l	$F_1 = l\,(a + b + c \cdots)$, F_2 nachzumessen.
	b, c, d, l	$F_1 = l\,(a + b + c \cdots)$, F_2 nachzumessen.
schief abgeschn. dreiseit. Prisma.	F_3, l_1, l_2, l_3, c, b, F_2	$F_1 = \frac{1}{2}\,[(l_1 + l_2)\,a$ $+ (l_2 + l_3)\,b + (l_3 + l_1)\,c]$. Untere Fläche F_2 und obere Fläche F_3 als Dreieck zu berechnen.

Cubikinhalt.	Schwerpunktslage.
$= r^2 \pi l.$	Wie vor.
$= a^3.$	Wie vor.
$= F_2 l.$ $= F_2 l.$	Wie vor.
$= \frac{F_2 (l_1 + l_2 + l_3)}{3}.$	$z = \frac{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_1 l_2 + l_1 l_3 + l_2 l_3}{4 (l_1 + l_2 + l_3)}.$

	Form.	Umfläche F_1. Eine Grundfläche F_2.
Rechteckige Pyramide.		$F_1 = a\sqrt{h^2 + \frac{b^2}{4}} + b\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}$. $F_2 = a\,b$.
Beliebige schiefe oder gerade Pyramide.		Untere Fläche F_2 nachzumessen.
Abgekürzte Pyramide.		

Cubikinhalt.	Schwerpunktslage.
$= F_2 \frac{h}{3}$, $= \frac{a\,b\,h}{3}$.	$z = \frac{h}{4}$. Für den Mantel allein: $z = \frac{h}{3}$.
$= F_2 \frac{h}{3}$.	In der Verbindungslinie der Spitze mit dem Schwerpunkte von F_2: $z = \frac{h}{4}$.
$= (F_2 + F_3 + \sqrt{F_2 F_3}) \frac{h}{3}$.	$z = \frac{F_2 + 2\sqrt{F_2 F_3} + 3 F_3}{F_2 + 2\sqrt{F_2 F_3} + F_3} \cdot \frac{h}{4}$.

	Form.	Umfläche E_1. Eine Grundfläche F_2.
Damm und Obelisk (rechteckig).		Speziell nachzurechnen.
Rechteckiger Keil.		dito.
Hohlcylinder.		$F_1 = 2\pi l (r_1 + r_2)$, $= 4\pi l r$, $F_2 = \pi (r_1^2 - r_2^2)$, $= 2\pi r b$.

Cubikinhalt.	Schwerpunktslage.
$= [2(a_1 b_1 + a_2 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)]\frac{h}{6}$.	Abstand von Fläche $a_1 b_1$ $z = \frac{a_1 b_1 + 3 a_2 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1}{2 a_1 b_1 + 2 a_2 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1} \cdot \frac{h}{2}$.
$= (2 a_1 + a_2)\frac{b_1 h}{b}$.	
$\pi l (r_1^2 - r_2^2)$, $2 \pi r b l$.	Mitte der Figur: $z = \frac{l}{2}$.

	Form.	Umfläche F_1. Eine Grundfläche F_2.
Parabol. Prisma.		$F_2 = {}^4/_3\, x\, y.$
Ring.		Ganze Fläche: $F = 4\,\pi^2 R\, r.$
Gerader Kegel.		$F_1 = r\,\pi \sqrt{h^2 + r^2}.$ $= s\, r\, \pi$ $F_2 = r^2\,\pi.$
Abgestumpfter Kegel.		$F_1 = \pi\,(r_1 + r_2) \times \sqrt{h^2 - (r_1^2 - r_2^2)},$ $= 2\,\pi\, r\, s,$ $F_2 = r_1^2\,\pi,$ $F_3 = r_2^2\,\pi.$

Cubikinhalt.	Schwerpunktslage.
$= {}^4/_3\, l\, x\, y.$	$z = {}^3/_5\, x,$ Abstand von der Grundfläche $= \frac{1}{2}.$
$2\, \pi^2\, R\, r^2.$	Mitte der Figur.
$= \frac{\pi\, r^2\, h}{3}.$	$z = \frac{h}{4}.$ Für den Mantel allein: $z_1 = \frac{h}{3}.$
$= \frac{\pi}{3} h (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2).$	$z = \frac{h}{4} \left(\frac{r_1^2 + 2 r_1 r_2 + 3 r_2^2}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}\right).$ Für den Mantel allein: $z = {}^1/_3\, h \frac{r_1 + 2\, r_2}{r_1 + r_2}.$

	Form.	Umfläche F_1. Eine Grundfläche F_2.
Kugel.		$F = 4 r^2 \pi$.
Kugelabschnitt — Ausschnitt.		Kegelmantel: $F = a \pi r$, $= \pi r \sqrt{2 r h - h^2}$.
		$F_1 = 2 \pi r h$, $= \pi (a^2 + h^2)$. $F_2 = a^2 \pi$, $r = \frac{a^2 + h^2}{2 h}$.
Kugelzone.		$F_1 = 2 r \pi h$. Kugelhalbmesser: $r = \frac{a^2 + h^2}{2 h}$, $F_1 = \pi (a^2 + h^2)$, $F_2 = a^2 \pi$,

Cubikinhalt.	Schwerpunktslage.
$= \frac{4\pi}{3} r^3$.	Im Mittelpunkte.
$= {}^2/_3 \pi r^2 h$.	$z = {}^3/_4 \left(r - \frac{h}{2}\right)$. Für den Mantel: $z = \frac{h}{2}$.
$= \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right)$, $= \frac{\pi}{6} h (3 a^2 + h^2)$; für einen niedrigen Abschnitt annähernd $= \frac{\pi a^2 h}{2}$.	$z = {}^3/_4 \frac{(2r - h)^2}{3r - h}$ (vom Mittelpunkt C ab). Für den Mantel allein: $z = r - {}^1/_2 h$.
= Differenz zweier Kugelabschnitte: $= \frac{\pi h}{b} (3a^2 + 3b^2 + h^2)$.	Für den Mantel allein ist der Abstand von der Grundfläche: $z = \frac{h}{2}$. Für den Körper: $z = {}^3/_4 h \cdot \frac{2r^2 - h^2}{3r^2 - h^2}$.

	Form.	Umfläche F_1. Eine Grundfläche F_2.
Kegelpfanne.		$F_1 = \pi (a^2 + h^2) + \pi (a_1^2 + h_1^2)$, $F_2 = 3{,}14159 (a^2 - a_1^2)$.
Körperl. △ A B C D (sphärisches).		$F_1 = \left(\frac{\alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0}{180} - 1\right) \pi r^2$, $F_2 = \frac{r^2 \pi}{2} \cdot \frac{a^0}{180}$.
Kübel.		Mit Hilfe der Ellipse zu berechnen.
Tonne.		Mit Hilfe des Kreises resp. der Parabel zu berechnen.

Cubikinhalt.	Schwerpunktslage.
$= \frac{\pi}{6} h (3 a^2 + h^2),$ $- \frac{\pi}{6} h_1 (3 a_1^2 + h_1^2).$	Wenn α der Centriwinkel, so ist der Abstand vom Centrum der Kugel: $z = {}^3/_8 \frac{a^4 - a_1^4}{a^3 - a_1^3} \cdot \left(1 + \cos. \frac{\alpha}{2}\right).$
$= \left(\frac{\alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0}{180} - 1\right) \frac{\pi r^3}{3}.$	
$= \frac{\pi h}{6} [2 (a b + a_1 b_1)$ $+ a b_1 + a_1 b].$	
Für kreisförmige: $= \frac{\pi l}{3} (2 r_1^2 + r_2^2),$ für parabolische Krümmung der Dauben: $= \pi l \left(\frac{2 r_1 + r_2}{3}\right)^2.$	Mitte der Figur.

	Form.	Umfläche F_1. Eine Grundfläche F_2.
Sphärisches Polygon.		Wenn n die Seitenzahl und s die Summe der Winkel: $\alpha + \beta + \gamma + \delta \cdots$ $F_1 = {}^1/_2 \left(\frac{s}{90} - 2n + 4\right) r^2 \pi.$ $F_2 = \frac{r^2 \pi}{2} \cdot \frac{a^0}{180}.$
Schief abgeschnitt. Cylinder.		$F_1 = \pi r (l + l_1).$
Schief abgeschnitt. Kegel.		$F_1 = 2 r \pi (s + s_1).$

Cubikinhalt.	Schwerpunktslage.
Durch Zerlegung in sphärische △ △ zu berechnen.	
$= \pi r^2 \frac{l + l_1}{2}$.	

	Form.	Umfläche F_1. Eine Grundfläche E_2.
Elliptische Zonen.	Exzentrizität = e.	$F_1 = \frac{\pi c}{a^2}\left[u\sqrt{a^4 - e^2 u^2} + \frac{a^4}{e} \text{ arc. } \frac{e u}{a^2}\right]$. F_2 = Kreis mit y resp. c. $F_1 = \frac{\pi a}{c^2}\left[u_1\sqrt{c^4 + e^2 u_1^2} + \frac{c^4}{e} \text{ logn. } \frac{e u_1 + \sqrt{c^4 + e^2 u_1^2}}{c^2}\right]$. F_2 = Kreis mit a resp. u.
Körper und Abschnitte.		F_2 = halbe Oberfläche des Ellipsoids minus Zone N resp. M.

Cubikinhalt.	Schwerpunktslage.
$= {}^2/_3 \pi a e^2 - \frac{\pi e^2 x^2}{a^2}\left(a - \frac{x}{3}\right).$	
$= {}^2/_3 \pi a^2 c - \frac{\pi a^2 x_1^2}{c^2}\left(c - \frac{x_1}{3}\right).$	
$= \pi \frac{c^2}{a^2} x^2 \left(a - \frac{x}{3}\right).$	
$= \pi \frac{a^2}{c^2} x_1^2 \left(c - \frac{x_1}{3}\right).$	

	Form.	Umfläche F_1. Eine Grundfläche F_2.
Ellipsoid.	Exzentrizität e.	$F_1 = 2\pi c\left[c + \frac{a^2}{e} \text{arc. sin.} \frac{e}{a}\right]$, $F_1 = 2\pi a\left[a + \frac{c^2}{e} \text{logn.} \frac{a+e}{c}\right]$.
Hyperbolischer Abschn.	$e = \sqrt{a^2 - c^2}$.	$F_1 = \pi c\left[\frac{u\sqrt{e^2u^2 - a^4}}{a^2} - c^2 - \frac{a^2}{e} \text{lgn.} \frac{eu + \sqrt{e^2u^2 - a^4}}{a(c+e)}\right]$. F_2 = Kreis mit y.
Körper.		$F_1 = 8\pi r^2 (\pi - {}^4/_3)$. F_2 = Kreis mit a.

Cubikinhalt.	Schwerpunktslage.
$= \frac{4}{3}\pi a c^2$,	Im Mittelpunkte.
$= \frac{4}{3}\pi a^2 c$.	desgl.
$= \frac{\pi c^2}{3 a^2} x^2 (3 a + x)$. $= \frac{\pi c^2}{3 a} (u^3 - 3 a^2 u + 2 a^3)$.	
$= \pi r^3 (\frac{3}{2}\pi^2 - \frac{8}{3})$.	

	Form.	Umfläche F_1. Eine Grundfläche F_2.
Cycloidischer Körper.	*a*	Bei einer Drehung um 2 r: $F_1 = 8\pi r^2 (\pi - {}^4/_3)$.

Cubikinhalt.	Schwerpunktslage.
Bei einer Drehung um a r: $= 5\pi^2 r^3$. Bei einer Drehung um 2 r: $= \pi r^3 ({}^3/_2 \pi^2 - {}^8/_3)$.	

Kurven-Konstruktions-Tafel.

Figur.	Aufgabe.
Kreis.	Einen Kreis durch drei Punkte a b c zu legen.
dito.	Eine Tangente an den Punkt a zu konstruiren.
dito.	Von Punkt a aus Tangenten an den Kreis zu legen.

Konstruktion.

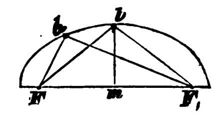
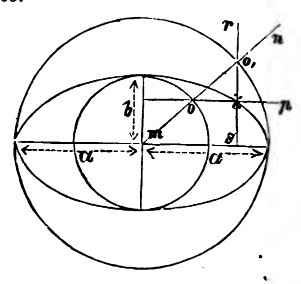
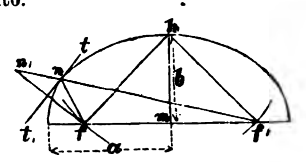
$\overline{a\,b}$ und $\overline{b\,c}$ in n und n, halbirt.

$\overline{m\,n} \perp \overline{a\,b}$; $\overline{m\,n,} \perp$ b c.

Mit $\overline{a\,m}$ ○ um Punkt m.

Ziehe $\overline{a\,m}$ und setze $\overline{a\,t} \perp \overline{a\,m}$, so ist $\overline{a\,t}$ die Tangente.

Ziehe $\overline{a\,m}$ und lege ⊙ über $\overline{a\,m}$, so sind $\overline{a\,n}$ und $\overline{a\,n,}$ Tangenten.

Figur.	Aufgabe.
Ellipse. 	Gegeben die Brennpunkte F und F_1, sowie die halbe kleine Axe m b.
dito. 	Konstruktion der Ellipse aus den Halbaxen a und b.
dito. 	Konstruktion der Tangente t t an Punkt n. Gegeben a und b.

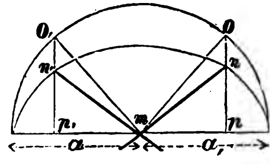
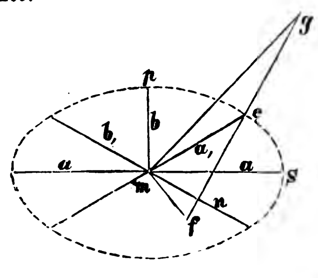
Konstruktion.

Setze in b einen Stift, spanne einen Faden von F über b nach F, und führe den Stift b — den Faden straff haltend — herum. Er beschreibt eine Ellipse.

Man lege ○ mit b um m; ○ mit a um m; Ziehe einen beliebigen Radius m n; durch Punkt o die Linie o p ∥ a und durch o, die Linie r s ∥ b, so ist × ein Punkt der Ellipse.

Schlage mit a um h zwei Bogen, so sind f und f, die Brennpunkte.

Ziehe $\overline{f, n}$ und mache $\overline{n\,n,}$ = $\overline{n\,f}$ halbire $\overline{n, f}$ und ziehe $\overline{n\,t,}$ so ist dieses die Tangente zu n.

Figur.	Aufgabe.
Ellipse.	Konstruktion einer Tangente von Punkt r aus.
dito. 	Konstruktion des konjugirten Durchmessers zu $\overline{m\,n}$.
dito. 	Konstruktion der Halbaxen a und b aus den gegebenen konjugirten Durchmessern a_1 und b_1.

Konstruktion.

f und f, Brennpunkte.
Kreisbogen mit 2 a um f.
Kreisbogen mit r f, um r.

Verbinde f mit s, und ziehe $\overline{rt}$, so ist dieses die Tangente.

○ mit a um m.
$\overline{op}$ ⊥ durch n auf a.
o mit m verbunden.
$\overline{o, m}$ ⊥ auf $\overline{om}$.
$\overline{o, p,}$ ⊥ auf a.
n, m ist der konj. Durchmesser.

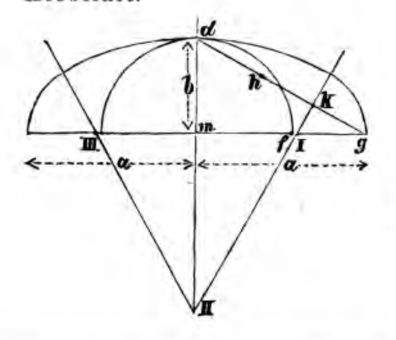
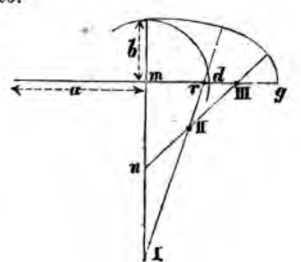
$\overline{cn}$ ⊥ von c aus auf b,
$\overline{cg}$ = cf = b,
g mit m verbunden.
f mit m verbunden.

∢ g m f halbirt und p m ⊥ auf a, so sind b und a die Richtungen der Halbaxen.

Ihre Längen sind:

$$a = \frac{\overline{mg} + \overline{mf}}{2}.$$

$$b = \frac{\overline{mg} - \overline{mf}}{2}.$$

Figur.	Aufgabe.
Korblinie. 	Konstruktion der Korblinie aus drei Mittelpunkten. Gegeben a u. b.
dito. 	Konstruktion der Korblinie aus fünf Mittelpunkten. Gegeben a u. b.

Konstruktion.

⊙ mit b um m.

$\overline{gf} = \overline{dh}$ und $\overline{hg}$ halbirt in k.

$\overline{k\,II} \perp \overline{dg}$,

so sind I. II. III. Mittelpunkte für die Kreise aus denen die Korblinie besteht.

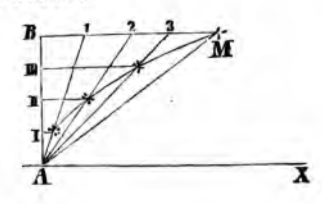
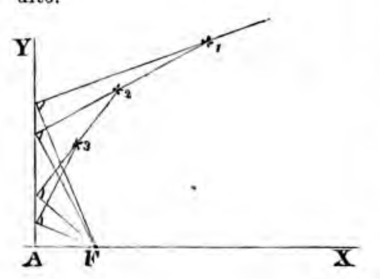
⊙ mit b um m.

$^7/_5\ \overline{dg} = \overline{m\,III} = \overline{mn} = \overline{n\,I}$.

$^2/_3\ \overline{m\,III} = \overline{mr}$.

r mit I verbunden.

Alsdann sind I. II. III. die Mittelpunkte für die eine .älfte der Korblinie.

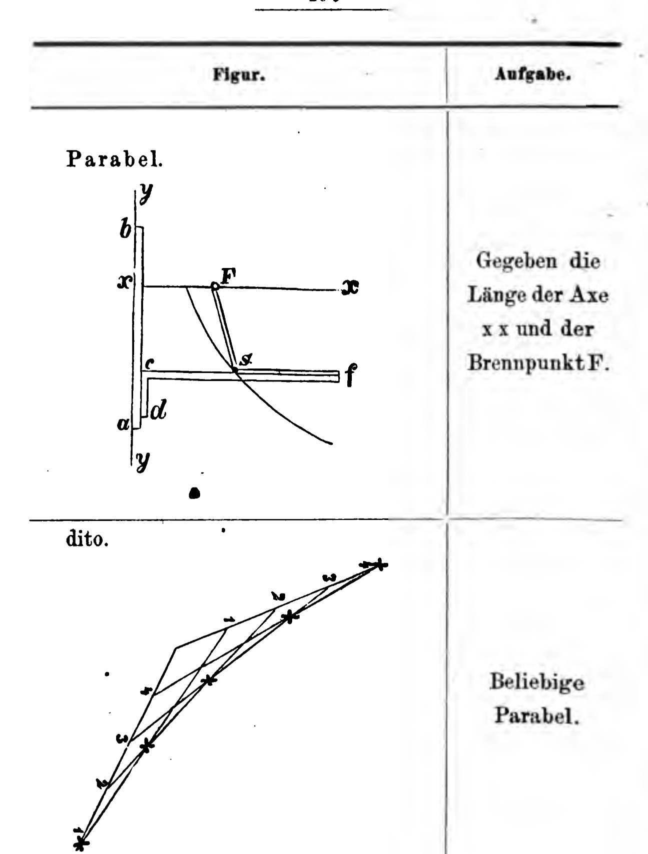
Figur.	Aufgabe.
Parabel. 	Gegeben ein Punkt M, der Scheitelpunkt A und die Axenrichtung A X.
dito. 	**Gegeben der Scheitelpunkt A und der Brennpunkt F.**

Konstruktion.

Setze $\overline{BA} \perp \overline{AX}$ und $\overline{MB} \perp \overline{AB}$. Theile BM in beliebig viele = Theile. Ebenso $\overline{AB}$ in dieselbe Anzahl. Ziehe die Strahlen $\overline{A1}$; $\overline{A2}$, $\overline{A3}$ u. s. w. Die ∥ Linien mit $\overline{AX}$, I. II. III. u. s. w., so sind ×× Punkte der Parabel.

Man lasse den Scheitel eines rechten Winkels an AY so gleiten, dass der eine Schenkel immer durch F geht. Der andere Schenkel bildet dann stets eine Tangente zur Parabel.

Man lege eine Kurve berührend an die Linien 1 2, 2 3, u. s. w., so ist dieses die Parabel.



Figur.	Aufgabe.
Parabel.	Gegeben die Länge der Axe x x und der Brennpunkt F.
dito.	Beliebige Parabel.

Konstruktion.

$\overline{YY} \perp Fx$.

Lege ein Lineal a b fest an Y Y und einen rechten Winkel d c f an a b, mache einen Faden f s F so lang wie $\overline{cf}$. Befestige das eine Ende in F, das andere in f. Verschiebe d c f an $\overline{ab}$ und führe einen Zeichenstift s — den Faden stets straff haltend — an c f. Er beschreibt die gesuchte Parabel.

Trage auf jeden Schenkel eines Winkels gleich viele und gleiche Theile ab, und verbinde die Punkte wie die Figur zeigt. ⨯ ⨯ sind Parabelpunkte.

Figur.	Aufgabe.
Parabel. 	Konstruktion der Tangente an einen Punkt e.
dito. 	Desgleichen von einem Punkte Q aus.

Konstruktion.

Mache $\overline{ad} = \overline{ac}$ oder $\overline{df} = \overline{fe}$. $\overline{de}$ ist die Tangente.

$\overline{af} = \overline{ab}$.

⊙ mit Q f um Q.

$\overline{cd}$ und $\overline{gh} \parallel \overline{bn}$.

d und h sind die Berührungspunkte der Tangenten.

Figur.	Aufgabe.
Hyperbel.	Gegeben die Brennpunkte f und f,, sowie die Scheitel a und b.
	Konstruktion der Asymptoten.

Konstruktion.

Lineal $f c$ drehbar um Brennpunkt f'. Faden $c d f$, $= f c$ minus $\overline{a b}$. Der Fahrstift d beschreibt unter Straffhalten des Fadens einen Arm der Hyperbel. Um die andere Hälfte zu verzeichnen mache man das Lineal um $f_{,}$ drehbar.

$\odot$ mit $\overline{m f}$ um m.
$\overline{g b} \perp \overline{f f_{,}}$
$m g$ und $m g_{,}$ sind Asymptoten.

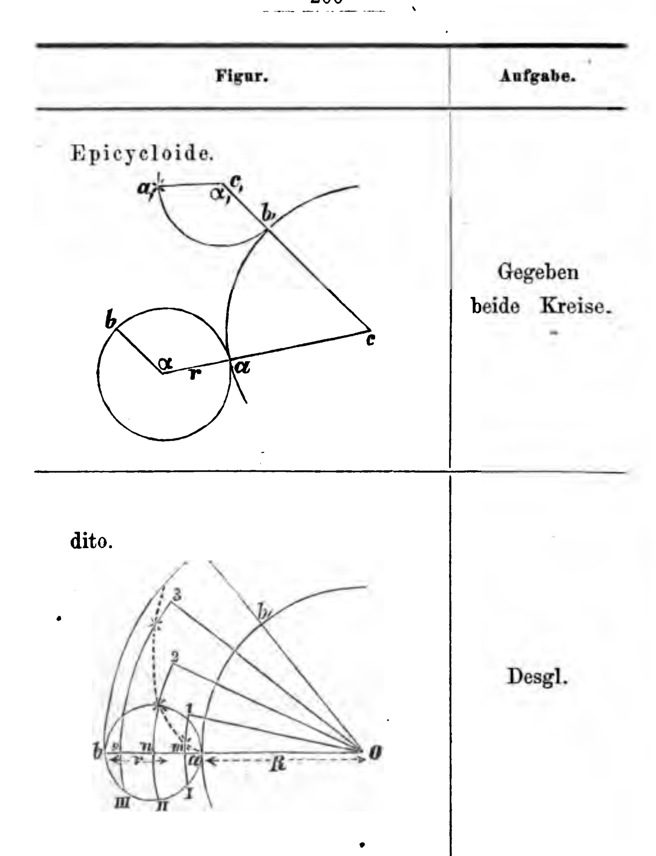
Figur.	Aufgabe.
Cycloide. (figure: a, b, s)	
dito. (figure: a, b, c, d, f, g, h, r, α, β)	Gegeben der Erzeugungskreis.
dito. (figure: a, c, f, g, h, i, k, l, m, 1–6)	

Konstruktion.

Rolle einen Kreis von Blech, Holz oder dergl. längs dem Lineal a b und befestige bei s einen Stift, so beschreibt derselbe eine Cycloide.

Mache Bogen a b = Linie a c. Bogen a f = Linie a g. Kreise mit r um d und h, und $\sphericalangle \alpha = \alpha,$ $\sphericalangle \beta = \sphericalangle \beta,$ so sind × × Punkte der Cycloide.

Linien $\overline{ab}$ = Halbkreis a c. Theile Beides in beliebig viele gleiche Theile. Konstruire die Durchschnittspunkte 1, 2, 3, 4 u. s. w. und mache $\overline{1 \times} = \overline{ef}$; $\overline{2 \times} = \overline{gh}$ 3 × = i k u. s. w., so sind × × × Punkte der Cycloide.



Figur.	Aufgabe.
Epicycloide.	Gegeben beide Kreise.
dito.	Desgl.

Konstruktion.

Mache Bogen a b = Bogen a b, ziehe $\overline{c\,c}$, schlage mit r einen Bogen um c, und mache $\sphericalangle\,\alpha = \alpha$, so ist × ein Punkt der Epicycloide.

Mache Bogen a b = Bogen a b, $= \frac{r}{R}$ 180 Grad. Theile beide in dieselbe Anzahl gleiche Theile. Ziehe die Radien $\overline{o\,1}$; $\overline{o\,2}$; $\overline{o\,3}$ u. s. w. Schlage die Bogen 1 I; 2 II; 3 III u. s. w. um o, konstruire die Durchschnittspunkte 1; 2; 3 u. s. w. und mache $\overline{1\times} = \overline{m\,I}$; $\overline{2\times} = \overline{n\,II}$; $\overline{3\times} = \overline{s\,III}$ u. s. w., so sind × × Punkte der Epicycloide.

Figur.	Aufgabe.
Epicycloide.	Gegeben beide Kreise.
Hypocycloide.	Desgl.

Konstruktion.

Der Halbmesser des Grundkreises sei = R, der des Erzeugungskreises = r.

Man theile ein Bogenstück des Grundkreises 1—4 in eine beliebige Anzahl gleicher Theile z. B. in 4. Es sei a die Länge eines jeden dieser Theile.

Man nehme ein Bogenstück $= \left(\frac{R}{r} + 1\right)$ a und trage es eben so oft — also hier 4 mal — auf dem Grund ⊙ ab. Verbinde Punkt 1 und I, 2 und II, 3 und III, 4 und IV, so sind ⁘ ⁘ die Mittelpunkte der Kreisbögen A B C D.

Rolle den massiven ○ A um die Innenkante des massiven Bogenstückes B. Der Fahrstift s beschreibt die Hypocycloide.

Figur.	Aufgabe.
Epicycloide.	Gegeben beide Kreise.
Hypocycloide.	Desgl.

Konstruktion.

Der Halbmesser des Grundkreises sei = R, der des Erzeugungskreises = r.

Man theile ein Bogenstück des Grundkreises 1—4 in eine beliebige Anzahl gleicher Theile z. B. in 4. Es sei a die Länge eines jeden dieser Theile.

Man nehme ein Bogenstück = $\left(\frac{R}{r} + 1\right)$ a und trage es eben so oft — also hier 4 mal — auf dem Grund ⊙ ab. Verbinde Punkt 1 und I, 2 und II, 3 und III, 4 und IV, so sind ⨯ ⨯ die Mittelpunkte der Kreisbögen A B C D.

Rolle den massiven ○ A um die Innenkante des massiven Bogenstückes B. Der Fahrstift s beschreibt die Hypocycloide.

Figur.	Aufgabe.
Hypocycloide.	Gegeben beide Kreise.
dito.	Desgl.

Konstruktion.

Bogen a o = Bogen o a, = $\frac{r}{R}$ 180°. Schlage einen Bogen mit r um b und mache $\sphericalangle \dot{\alpha} = \sphericalangle \alpha$, so ist × ein Punkt der Hypocycloide.

Bogen a b = Bogen a c = $\frac{r}{R}$ 180°. Theile Beides in gleich viel gleiche Theile. Schlage die Bogen 1, 2, 3, 4, 5, ziehe die Radien c d e f und mache $\overline{c\times} = \overline{1m}$; $\overline{d\times} = \overline{2n}$; $\overline{e\times} = \overline{3p}$; $\overline{f\times} = \overline{4q}$ u. s. w., so sind × × Punkte der Cycloide.

Figur.	Aufgabe.
Kreisevolvente.	Gegeben beide Kreise.
Cylinder. Schraubenlinie.	Gegeben die Steigung und der Grundkreis.

Konstruktion.

Mache $\overline{OA}$ = Bogen O B, theile Beides in gleich viel gleiche Theile, deren jeder = a sei.

Lege an Punkt 1 eine Tangente und mache sie = a; desgl. eine Tangente an Punkt 2 = 2 a u. s. w., so sind × × Punkte der Evolvente.

Theile die Steigung $\overline{AB}$ in n gleiche Theile und den Grundkreis in ebenso viele. Ziehe die Horizontal- und Vertikal-Linien wie in der Figur, so sind × × Punkte der Schraubenlinie.

Figur.	Aufgabe.
Conchoide.	Gegeben a.
Neoide.	Gegeben der Kreis und b c.

Konstruktion.

$\overline{y\,y} \perp \overline{x\,x}$. a = a, Punkt y, beliebig, ebenso Linie y, n N.

Mache $\overline{n\,N} = \overline{n\,m} = a$, so sind × × × Punkte der Conchoide.

Theile den Halbkreis $\overline{a\,b}$ in n gleiche Theile, ebenso $\overline{b\,c}$. Jeder der Letzteren sei = a. Ziehe den Radius $\overline{m\,1}$ und mache $\overline{1\,I} = a$; ferner den Radius $\overline{m\,2}$ und mache $\overline{2\,II} = 2\,a$; ferner den Radius $\overline{m\,3}$ und mache $\overline{3\,III} = 3\,a$ u. s. w., so sind I II III Punkte der Neoide.

Goniometrische Formel-Tafel.

	Formel.	
	$\sin. 0^0 = 0$	$\cos. 0^0 = 1.$
	$\text{tang}. 0^0 = 0$	$\cot. 0^0 = \infty.$
	$\sin. 30^0 = \frac{1}{2}$	$\cos. 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$
	$\text{tang}. 30^0 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\cot. 30^0 = \sqrt{3}.$
	$\sin. 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\cos. 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$
	$\text{tang}. 45^0 = 1$	$\cot. 45^0 = 1.$
	$\sin. 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\cos. 60^0 = \frac{1}{2}.$
	$\text{tang}. 60^0 = \sqrt{3}$	$\cot. 60^0 = \frac{1}{3}\sqrt{3}.$
	$\sin. 90^0 = 1$	$\cos. 90^0 = 0.$
	$\text{tang}. 90^0 = \infty$	$\cot. 90^0 = 0.$

$$\sin.\ 90 \pm \alpha = \cos.\ \alpha.$$
$$\cos.\ 90 \pm \alpha = \mp \sin.\ \alpha.$$
$$\sin.\ 180 \pm \alpha = \mp \sin.\ \alpha.$$
$$\cos.\ 180 \pm \alpha = -\cos.\ \alpha.$$
$$\sin.\ 270 \pm \alpha = -\cos.\ \alpha.$$
$$\cos.\ 270 \pm \alpha = \pm \sin.\ \alpha.$$
$$\sin.\ 360 \pm \alpha = \pm \sin.\ \alpha.$$
$$\cos.\ 360 \pm \alpha = \cos.\ \alpha.$$
$$\text{tang}.\ 90 \pm \alpha = \mp \cot.\ \alpha.$$
$$\cot.\ 90 \pm \alpha = \mp \text{tang}.\ \alpha.$$

	Formel.
	$\text{tang.}\,180 \pm \alpha = \pm\,\text{tang.}\,\alpha.$
	$\text{cot.}\;\;180 \pm \alpha = \pm\,\text{cot.}\,\alpha.$
	$\text{tang.}\,270 \pm \alpha = \mp\,\text{cot.}\,\alpha.$
	$\text{cot.}\;\;270 \pm \alpha = \mp\,\text{tang.}\,\alpha.$
	$\text{tang.}\,360 \pm \alpha = \pm\,\text{tang.}\,\alpha.$
	$\text{cot.}\;\;360 \pm \alpha = \pm\,\text{cot.}\,\alpha.$
	$\sin.\,\alpha^2 + \cos.\,\alpha^2 = 1.$
	$\text{tang.}\,\alpha \cdot \text{cot.}\,\alpha = 1.$
	$\text{tang.}\,\alpha = \dfrac{\sin.\,\alpha}{\cos.\,\alpha}.$
	$\text{cot.}\;\;\alpha = \dfrac{\cos.\,\alpha}{\sin.\,\alpha}.$
	$\text{sec.}\;\;\alpha = \dfrac{1}{\cos.\,\alpha}.$
	$\text{cosec.}\,\alpha = \dfrac{1}{\sin.\,\alpha}.$
	$\sin.\;\;\alpha = \dfrac{\text{tang.}\,\alpha}{\sqrt{1 + \text{tang.}\,\alpha^2}}$
	$= \dfrac{1}{\sqrt{1 + \text{cot.}\,\alpha^2}}$
	$= \dfrac{2\,\text{tang.}\,\frac{\alpha}{2}}{1 + \text{tang.}\,\frac{\alpha}{2}^2}$

	Formel.
	$= \sqrt{\dfrac{1 - \cos. 2\alpha}{2}}.$ $\cos. \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \text{tang.}\, \alpha^2}}$ $= \dfrac{\cot. \alpha}{\sqrt{1 + \cot. \alpha^2}}$ $= \dfrac{1 - \text{tang.}\, \dfrac{\alpha^2}{2}}{1 + \text{tang.}\, \dfrac{\alpha^2}{2}}$ $= \sqrt{\dfrac{1 + \cos. 2\alpha}{2}}.$
	$\sin. 2\alpha = 2 \sin. \alpha \cos. \alpha.$ $\cos. 2\alpha = \cos. \alpha^2 - \sin. \alpha^2$ $= 1 - 2 \sin. \alpha^2$ $= 2 \cos. \alpha^2 - 1.$ $\sin. 3\alpha = 3 \sin. \alpha - 4 \sin. \alpha^3.$ $\cos. 3\alpha = 4 \cos. \alpha^3 - 3 \cos. \alpha.$ $\sin. \alpha^2 = {}^1/_2 (1 - \cos. 2\alpha).$ $\cos. \alpha^2 = {}^1/_2 (1 + \cos. 2\alpha).$ $\sin. \alpha^3 = {}^1/_4 (3 \sin. \alpha - \sin. 3\alpha).$ $\cos. \alpha^3 = {}^1/_4 (3 \cos. \alpha + \cos. 3\alpha).$

Formel.

$$1 + \cos.\ \alpha = 2 \cos.\ \frac{\alpha^2}{2}.$$

$$1 - \cos.\ \alpha = 2 \sin.\ \frac{\alpha^2}{2}.$$

$$\frac{1 + \cos.\ \alpha}{\sin.\ \alpha} = \cot.\ \frac{\alpha}{2}.$$

$$\frac{1 - \cos.\ \alpha}{\sin.\ \alpha} = \text{tang.}\ \frac{\alpha}{2}.$$

$$\sin.\ (\alpha \pm \beta) = \sin.\ \alpha \cos.\ \beta \pm \cos.\ \alpha \sin.\ \beta.$$

$$\cos.\ (\alpha \pm \beta) = \cos.\ \alpha \cos.\ \beta \mp \sin.\ \alpha \sin.\ \beta.$$

$$\sin.\ \alpha + \sin.\ \beta = 2 \sin.\ \frac{\alpha + \beta}{2} \cos.\ \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$\sin.\ \alpha - \sin.\ \beta = 2 \cos.\ \frac{\alpha + \beta}{2} \sin.\ \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$\cos.\ \alpha + \cos.\ \beta = 2 \cos.\ \frac{\alpha + \beta}{2} \cos.\ \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$\cos.\ \alpha - \cos.\ \beta = 2 \sin.\ \frac{\alpha + \beta}{2} \sin.\ \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$\frac{\sin.\ \alpha + \sin.\ \beta}{\cos.\ \alpha + \cos.\ \beta} = \text{tang.}\ \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

$$\frac{\sin.\ \alpha - \sin.\ \beta}{\cos.\ \alpha + \cos.\ \beta} = \text{tang.}\ \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$\sin.\ \alpha^2 - \sin.\ \beta^2 = \sin.\ (\alpha + \beta) \sin.\ (\alpha - \beta).$$

$$\cos.\ \alpha^2 - \cos.\ \beta^2 = \sin.\ (\alpha + \beta) \sin.\ (\beta - \alpha).$$

	Formel.
	$\text{tang.}\,(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\text{tang.}\,\alpha \pm \text{tang.}\,\beta}{1 \mp \text{tang.}\,\alpha\,\text{tang.}\,\beta}.$ $\cot.\,(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\cot.\,\alpha\,\cot.\,\beta \mp 1}{\cot.\,\alpha \pm \cot.\,\beta}.$ $\text{tang.}\,2\,\alpha = \dfrac{2\,\text{tang.}\,\alpha}{1 - \text{tang.}\,a^2}.$ $\text{tang.}\,\alpha = \dfrac{2\,\text{tang.}\,\dfrac{\alpha}{2}}{1 - \text{tang.}\,\dfrac{\alpha^2}{2}}.$ $= \dfrac{\sin.\,2\,\alpha}{1 + \cos.\,2\,\alpha}.$ $= \sqrt{\dfrac{1 - \cos.\,2\,\alpha}{1 + \cos.\,2\,\alpha}}.$ $\cot.\,2\,\alpha = \dfrac{\cot.\,\alpha^2 - 1}{2\,\cot.\,\alpha}.$ $\cot.\,\alpha = \dfrac{\cot.\,\dfrac{\alpha^2}{2} - 1}{2\,\cot.\,\dfrac{\alpha}{2}},$ $= \dfrac{\sin.\,2\,\alpha}{1 - \cos.\,2\,\alpha},$ $= \sqrt{\dfrac{1 + \cos.\,2\,\alpha}{1 - \cos.\,2\,\alpha}}.$

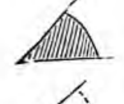
	Formel.
	$\text{tang.}\,\alpha + \text{tang.}\,\beta$ $= \dfrac{\sin.\,(\alpha \pm \beta)}{\cos.\,\alpha\,\cos.\,\beta}.$
	$\cot.\,\alpha \pm \cot.\,\beta,$ $= \dfrac{\sin.\,(\alpha \pm \beta)}{\sin.\,\alpha\,\sin.\,\beta}.$

Trigonometrische Formel-Tafel.

A. Ebenes Dreieck.

Die scharf ausgezogenen Seiten ———————— sind gegeben.

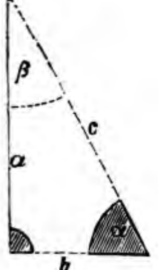
Die punktirten - - - - - - - - - werden gesucht;



gegebener Winkel,

gesuchter Winkel.

Figur.	Formel.
	Rechtwinkeliges Dreieck.
	$\cos.\ \alpha = \frac{b}{c}$, $\sin.\ \beta = \frac{b}{c}$, $\left.\begin{array}{l} a \\ a \\ a \end{array}\right\} \begin{array}{l} = c \sin.\ \alpha, \\ = c \cos.\ \beta, \\ = \sqrt{c^2 - b^2}, \end{array}$ $\alpha = 90^0 - \beta^0$, $\beta = 90^0 - \alpha^0$.
	$\text{tang.}\ \alpha = \frac{a}{b}$, $\text{tang.}\ \beta = \frac{b}{a}$, $\left.\begin{array}{l} c \\ c \\ c \end{array}\right\} \begin{array}{l} = \frac{\alpha}{\sin.\ \alpha}. \\ = \frac{b}{\cos.\ \beta}, \\ = \sqrt{a^2 + b^2}. \end{array}$ $\alpha = 90^0 - \beta^0$, $\beta = 90^0 - \alpha^0$.

Figur.	Formel.
	Rechtwinkeliges Dreieck.
	$\sin.\ \alpha = \frac{a}{c}$, $\cos.\ \beta = \frac{a}{c}$, $\left.\begin{array}{l} b \\ b \\ b \end{array}\right\} \begin{array}{l} = c \cdot \sin.\ \beta, \\ = c \cdot \cos.\ \alpha, \\ = \sqrt{c^2 - a^2}. \end{array}$ $\alpha = 90^0 - \beta^0$, $\beta = 90^0 - \alpha^0$.
	$b = a \text{ cotang. } \alpha$, $c = \frac{a}{\sin.\ \alpha}$, $\beta = 90^0 - \alpha^0$.

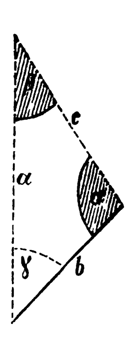
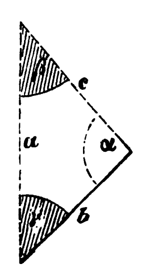
Figur.	Formel.
	Rechtwinkeliges Dreieck.
	$b = a \text{ tang. } \beta,$ $c = \frac{a}{\cos. \beta},$ $\alpha = 90^0 - \beta^0.$
	$a = b \text{ tang. } \alpha,$ $c = \frac{b}{\cos. \alpha},$ $\beta = 90^0 - \alpha^0.$

Figur.	Formel.
	Rechtwinkeliges Dreieck.
	$a = b \cot. \beta,$ $c = \frac{b}{\sin. \beta},$ $\alpha = 90^0 - \beta^0.$
	$a = c \sin. \alpha,$ $b = c \cos. \alpha,$ $\beta = 90^0 - \alpha^0.$

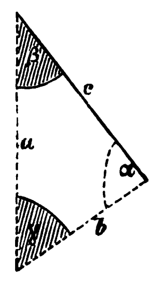
Figur.	Formel.
	Rechtwinkeliges Dreieck.
	$a = c \cos. \beta,$ $b = c \sin. \beta,$ $\alpha = 90^0 - \beta^0.$
	Schiefwinkeliges Dreieck.
	$b = \dfrac{a \sin. \beta}{\sin. \alpha},$ $c = \dfrac{a \sin. (\alpha + \beta)}{\sin. \alpha},$ $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)^0.$

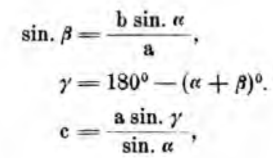
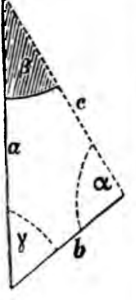
Figur.	Formel.
	Schiefwinkeliges Dreieck.
	$b = \frac{a \sin. (\alpha + \gamma)}{\sin. \alpha}$, $c = \frac{a \sin. \gamma}{\sin. \alpha}$, $\beta = 180^0 - (\alpha + \gamma)^0$.
	$b = \frac{a \sin. \beta}{\sin. (\beta + \gamma)}$, $c = \frac{a \sin. \gamma}{\sin. (\beta + \gamma)}$. $\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma)^0$.

γ

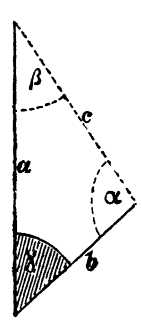
Figur.	Formel.
	Schiefwinkeliges Dreieck.
	$a = \frac{b \sin. \alpha}{\sin. \beta}$, $c = \frac{b \sin. (\alpha + \beta)}{\sin. \beta}$, $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)^0$.
	$a = \frac{b \sin. (\beta + \gamma)}{\sin. \beta}$, $c = \frac{b \sin. \gamma}{\sin. \beta}$, $\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma)^0$.

Figur.	Formel.
	Schiefwinkeliges Dreieck.
β c α α γ b	$a = \frac{b \sin. \alpha}{\sin. (\alpha + \gamma)}$, $c = \frac{b \sin. \gamma}{\sin. (\alpha + \gamma)}$, $\beta = 180^0 - (\alpha + \gamma)^0$.
β c α α b γ	$a = \frac{c \sin. \alpha}{\sin. (\alpha + \beta)}$, $b = \frac{c \sin. \beta}{\sin. (\alpha + \beta)}$, $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)^0$.

Figur.	Formel.
	Schiefwinkeliges Dreieck.
	$a = \frac{c \sin.\ \alpha}{\sin.\ \gamma}$, $b = \frac{c \sin.(\alpha + \gamma)}{\sin.\ \gamma}$, $\beta = 180^0 - (\alpha + \gamma)$.
	$a = \frac{c \sin.\ (\beta + \gamma)}{\sin.\ \gamma}$, $b = \frac{c \sin.\ \beta}{\sin.\ \gamma}$, $\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma)^0$.

Figur.	Formel.
	Schiefwinkeliges Dreieck.
	 $\sin.\,\beta = \frac{b \sin.\,\alpha}{a}$, $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)^0$. $c = \frac{a \sin.\,\gamma}{\sin.\,\alpha}$,
	$\sin.\,\alpha = \frac{a \sin.\,\beta}{b}$. $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)^0$. $c = \frac{a \sin.\,\gamma}{\sin.\,\alpha}$.

Figur.	Formel.
	Schiefwinkeliges Dreieck.



$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos.\gamma}.$$

$$\text{tang.}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \frac{a - b}{a + b}\cot.\frac{\gamma}{2}$$

$$(\alpha + \beta)^0 = 180^0 - \gamma^0.$$

Aus:

$$\frac{\alpha - \beta}{2} \text{ und } \alpha + \beta$$

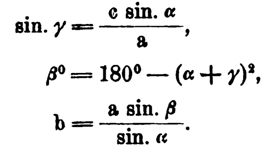
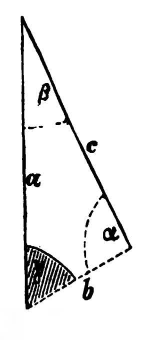
ergibt sich α und β einzeln.

Um c durch Logarithmen zu berechnen, berechne man zuerst einen Hilfs $\sphericalangle\,\varphi$:

$$\text{tang.}\,\varphi = \frac{2\sin.\,{}^1/_2\,\gamma\,\sqrt{a\,b}}{(a - b)}$$

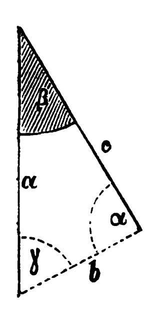
und nehme alsdann:

$$c = \frac{(a - b)}{\cos.\,\varphi}.$$

Figur.	Formel.
	Schiefwinkeliges Dreieck.
	 $\sin.\gamma = \frac{c \sin.\alpha}{a}$, $\beta^0 = 180^0 - (\alpha + \gamma)^2$, $b = \frac{a \sin.\beta}{\sin.\alpha}$.
	$\sin.\alpha = \frac{a \sin.\gamma}{c}$, $\beta^0 = 180^0 - (\alpha + \gamma)^0$. $b = \frac{a \sin.\beta}{\sin.\alpha}$.

Figur.	Formel.

Schiefwinkeliges Dreieck.



$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2\,a\,c\cos.\,\beta}.$$

$$\text{tang.}\left(\frac{\alpha - \gamma}{2}\right) = \frac{a - c}{a + c} \cdot \cot.\,\frac{\beta}{2}$$

$$(\alpha + \gamma)^0 = 180^0 - \beta.$$

Aus:

$$\frac{\alpha - \gamma}{2} \text{ und } (\alpha + \gamma)$$

ergibt sich α und γ einzeln.

Um b durch Logarithmen zu ermitteln, berechne man zuerst einen Hilfs ∢ φ:

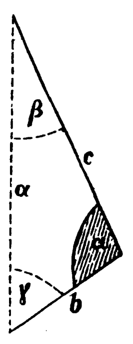
$$\text{tang.}\,\varphi = \frac{2\sin.\,{}^1/_2\,\beta\sqrt{a\,c}}{a - c}$$

und nehme dann:

$$b = \frac{a - c}{\cos.\,\varphi}.$$

Figur.	Formel.
	Schiefwinkeliges Dreieck.
β, c, α, α, γ, b	$\sin.\beta = \frac{b \sin.\gamma}{c}$, $\alpha^0 = 180^0 - (\beta + \gamma)^0$, $a = \frac{b \sin.\alpha}{\sin.\beta}$.
β, c, α, α, γ, b	$\sin.\gamma = \frac{c \sin.\beta}{b}$ $\alpha^0 = 180^0 - (\beta + \gamma)^0$, $a = \frac{b \sin.\alpha}{\sin.\beta}$.

Figur.	Formel.
	Schiefwinkeliges Dreieck.



$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos.\alpha},$$

$$\text{tang.}\,\frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{c - b}{c + b}\,\text{cot.}\,\frac{\alpha}{2}$$

$$(\beta + \gamma)^0 = 180^0 - \alpha.$$

Aus: $\frac{\beta - \gamma}{2}$ und $(\beta + \gamma)$

ergibt sich β und γ einzeln.

Um a durch Logarithmen zu finden, berechne man einen Hilfs ∢ φ:

$$\text{tang.}\,\varphi = \frac{2\sin.\,{}^1/_2\,\alpha\sqrt{b\,c}}{(c - b)}$$

und nehme dann:

$$a = \frac{(c - b)}{\cos.\,\varphi}.$$

Figur.	Formel.

Schiefwinkeliges Dreieck.

Man setze:

$$\frac{a+b+c}{2}=s$$

und nehme:

$$\cos.\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{b\,c}},$$

$$\cos.\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{a\,c}},$$

$$\cos.\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{a\,b}}.$$

$$\frac{a+b+c}{2}\text{ setze }=s.$$

Flächeninhalt $= F$.

Halbmesser des umschriebenen Kreises $= d$.

$$d=\frac{a}{\sin.\alpha}=\frac{b}{\sin.\beta}=\frac{c}{\sin.\gamma}.$$

$$F=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$=\frac{b\,c\sin.\alpha}{2},$$

$$=\frac{a\,b\sin.\gamma}{2},$$

$$=\frac{a\,c\sin.\beta}{2}.$$

<table>
<tr><th>Figur.</th><th>Formel.</th></tr>
<tr><td>Wie vor.</td><td>

$$(a + b) \sin. \frac{\gamma}{2} = c \cos. \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$(a - b) \cos. \frac{\gamma}{2} = c \sin. \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\frac{(a + b)}{(a - b)} = \frac{\operatorname{tang.} \frac{\alpha + \beta}{2}}{\operatorname{tang.} \frac{\alpha - \beta}{2}}.$$

</td></tr>
<tr><td></td><td>

Ist r der Radius des um ein △ beschriebenen Kreises und ϱ der des eingeschriebenen Kreises, so ist, wenn F den Flächeninhalt des △ bezeichnet:

$$r = \frac{a\,b\,c}{4\,F}; \quad \varrho = \frac{2\,F}{a + b + c}$$

$$2\,r\,\varrho = \frac{a\,b\,c}{a + b + c}.$$

</td></tr>
<tr><td></td><td>

Sind d und d' die Diagonalen eines Viereckes und α der von ihnen eingeschlossene ∢, so ist:

$$F = \tfrac{1}{2}\, d \cdot d' \sin. \alpha.$$

Ist das Viereck ein in den Kreis beschriebenes mit den Seiten a b c d, so ist:

$$F = \tfrac{1}{2}\,(a\,b + c\,d) \sin. \gamma$$

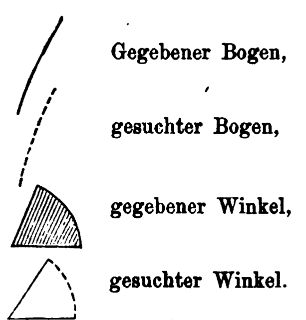
$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}s - a \cdot \tfrac{1}{2}s - b \cdot \tfrac{1}{2}s - c \cdot \tfrac{1}{2}s - d}$$

$$d \cdot d' = a\,c + b\,d.$$

</td></tr>
</table>

Trigonometrische Formel-Tafel.

B. Sphärisches Dreieck.



Figur.	Formel.
	Rechtwinkeliges Dreieck.
	$\cos. c = \cos. a \cos. b$ $\text{tang.}\ \alpha = \frac{\text{tang. a}}{\text{sin. b}}$ $\text{tang.}\ \beta = \frac{\text{tang.}\ \beta}{\text{sin. a}}.$
	$\cos. b = \frac{\cos. c}{\cos. a}$ $\sin. \alpha = \frac{\sin. a}{\sin. c}$ $\cos. \beta = \text{tang. a cot. c}.$

Figur.	Formel.
	Rechtwinkeliges Dreieck.
	$\sin. b = \operatorname{tang}. a \cot. \alpha$ $\sin. c = \frac{\sin. a}{\sin. \alpha}$ $\sin. \beta = \frac{\cos. \alpha}{\cos. a}$
	$\operatorname{tang}. a = \sin. b \operatorname{tang}. \alpha$ $\operatorname{tang}. c = \frac{\operatorname{tang}. b}{\cos. \alpha}$ $\cos. \beta = \cos. b \sin. \alpha.$

Figur.	Formel.
	Rechtwinkeliges Dreieck.
	$\sin. a = \sin. c \sin. \alpha$ $\text{tang. } b = \text{tang. } c \cos. \alpha$ $\cot. \beta = \cos. c \text{ tang. } \alpha.$
	$\cos. a = \dfrac{\cos. \alpha}{\sin. \beta},$ $\cos. b = \dfrac{\cos. \beta}{\sin. \alpha},$ $\cos. c = \cot. \alpha \cot. \beta.$

Figur.	Formel.
	Schiefwinkeliges Dreieck.
	Setze: $\frac{a + b + c}{2} = s.$ $\cos.\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin. s \sin. s - a}{\sin. b \sin. c}},$ $\cos.\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin. s \sin. s - b}{\sin. a \sin. c}},$ $\text{eos}.\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin. s \sin. s - c}{\sin. b \sin. c}}.$
	$\sin. \beta = \frac{\sin. b \sin. \alpha}{\sin. a},$ $\text{tang}.\frac{c}{2} = \frac{\text{tang}.\frac{a - b}{2} \sin.\frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin.\frac{\alpha - \beta}{2}}.$ $\text{tang}.\frac{\gamma}{2} = \frac{\sin.\frac{a - b}{2}}{\text{tang}.\frac{\alpha - \beta}{2} \sin.\frac{a + b}{2}}.$

Figur.	Formel.
	Schiefwinkeliges Dreieck.

$$\text{tang.}\,\frac{\alpha-\beta}{2}=\text{cot.}\,\frac{\gamma}{2}\,\frac{\text{sin.}\,\frac{a-b}{2}}{\text{sin.}\,\frac{a+b}{2}},$$

$$\text{tang.}\,\frac{\alpha+\beta}{2}=\text{cot.}\,\frac{\gamma}{2}\,\frac{\text{cos.}\,\frac{a-b}{2}}{\text{cos.}\,\frac{a+b}{2}},$$

Hieraus:

$$\alpha=\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\beta=\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\text{sin. c}=\frac{\text{sin. a sin.}\,\gamma}{\text{sin.}\,\alpha},$$

oder:

$$\text{cos. c}=\text{cos. a cos. b}$$
$$+\,\text{sin. a sin. b cos.}\,\gamma.$$

Figur.	Formel.

Schiefwinkeliges Dreieck.

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\sigma \text{ gesetzt.}$$

$$\cos.\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\cos.\overline{\sigma-\beta}\cos.\overline{\sigma-\gamma}}{\sin.\beta\sin.\gamma}},$$

$$\cos.\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{\cos.\overline{\sigma-\alpha}\cos.\overline{\sigma-\gamma}}{\sin.\alpha\sin.\gamma}},$$

$$\cos.\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{\cos.\overline{\sigma-\alpha}\sin.\overline{\sigma-\beta}}{\sin.\alpha\sin.\beta}}.$$

$$\sin.\mathrm{b}=\frac{\sin.\beta\sin.\mathrm{a}}{\sin.\alpha},$$

$$\text{tang.}\frac{\mathrm{c}}{2}=\frac{\text{tang.}\frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{2}\sin.\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin.\frac{\alpha-\beta}{2}},$$

$$\text{tang.}\frac{\gamma}{2}=\frac{\sin.\frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{2}}{\text{tang.}\frac{\alpha-\beta}{2}\sin.\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{2}}.$$

Figur.	Formel.
	Schiefwinkeliges Dreieck.
	$\cos.\ c = \frac{\cos.\ b \cdot \cos.\ a - \varphi}{\cos.\ \varphi}$, Für den Hilfs ∢ φ: $\text{tang.}\ \varphi = \text{tang.}\ b \cos.\ \gamma$.
	$\cos.\ c - \varphi = \frac{\cos.\ a \cos.\ b}{\cos.\ \varphi}$. Für den Hilfs ∢ φ: $\text{tang.}\ \varphi = \text{tang.}\ b \cos.\ \gamma$.

Figur.	Formel.

Schiefwinkeliges Dreieck.

$$\text{tang.}\ \frac{a-b}{2} = \text{tang.}\ \frac{c}{2}\ \frac{\sin.\ \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin.\ \frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

$$\text{tang.}\ \frac{a+b}{2} = \text{tang.}\ \frac{c}{2}\ \frac{\cos.\ \frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos.\ \frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Hieraus:

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2},$$

$$b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2},$$

$$\sin.\ \gamma = \frac{\sin.\ c\ \sin.\ \alpha}{\sin.\ a},$$

oder:

$$\cos.\ \gamma = -\cos.\ \alpha\ \cos.\ \beta + \sin.\ \alpha\ \sin.\ \beta\ \cos.\ c.$$

Figur.	Formel.
	Schiefwinkeliges Dreieck.
Wie vor.	I. $\frac{\cos. \frac{1}{2} (\alpha - \beta)}{\sin. \frac{1}{2} \gamma} = \frac{\sin. \frac{1}{2} (a + b)}{\sin. \frac{1}{2} a}$. II. $\frac{\cos. \frac{1}{2} (\alpha + \beta)}{\sin. \frac{1}{2} \gamma} = \frac{\cos. \frac{1}{2} (a + b)}{\cos. \frac{1}{2} c}$, III. $\frac{\sin. \frac{1}{2} (\alpha - \beta)}{\cos. \frac{1}{2} \gamma} = \frac{\sin. \frac{1}{2} (a - b)}{\sin. \frac{1}{2} c}$, IV. $\frac{\sin. \frac{1}{2} (\alpha + \beta)}{\cos. \frac{1}{2} \gamma} = \frac{\cos. \frac{1}{2} (a - b)}{\cos. \frac{1}{2} c}$, Flächeninhalt: $F = \frac{\alpha + \beta + \gamma - 180}{180} r^2 \pi$.

Tafel der trigonometrischen Linien und deren Logarithmen.

Trigonometrische Tafeln.

Einrichtung und Gebrauch der trigonometrischen Tabellen.

Die erste der folgenden Tabellen gibt die vier trigonometrischen Linien Sinus, Cosinus, Tangente und Cotangente aller Winkel von 0^0 bis 90^0 mit Interwallen von 10 zu 10 Minuten an; die zweite Tabelle enthält die Logarithmen dieser Grössen. Jede dieser Tabellen besteht aus 8 Vertikalkolumnen, wovon die ersten und die letzten zwei, die Grade und Minuten ausdrücken und die mittleren vier die entsprechenden Werthe der trigonometrischen Linien, oder die Logarithmen derselben angeben. Die Grade und Minuten und die zugehörigen trigonometrischen Linien bilden eine horizontale Zeile. Die Winkel unter 45 Grad sind in den ersten zwei und die über 45 Grad in den letzten Vertikalkolumnen enthalten. Auf jene beziehen sich die Ueber-, auf diese die Unterschriften der mittleren Vertikalkolumnen. Die Zahlen zwischen je sechs, einem ganzen Grade entsprechenden Zeilen sind die Differenzen von je zwei auf einander folgenden trigonometrischen Linien. Man findet von einem Winkel unter 45^0 die ent-

sprechenden trigonometrischen Linien, oder die Logarithmen dieser, wenn man diese Winkel in der vordersten Vertikalkolumne aufsucht, und von der gefundenen Stelle aus horizontal herübergeht bis in die Vertikalkolumne, deren Aufschrift mit dem Namen der gesuchten Linie übereinstimmt. So gibt z. B. die Tafel No. 1 sin. 11°, 20′ = 0,1965; cos. 11°, 20′ = 0,9805 u. s. w., weil diese Zahlen in den mit Sinus und Cosinus überschriebenen Vertikalkolumnen und zugleich in der Zeile enthalten sind, die mit 11°, 20′ anfängt. Ebenso ist cos. 34°, 50′ = 0,8208 und tang. 34°, 50′ = 0,6959, endlich cotang. 41°, 30′ = 1,1303. Ebenso findet man in der Tafel No. 2. log. sin. 26°, 30′ = 9,64953; log. cos. 26°, 30′ = 9,95179, ferner log. tang. 17°, 40′ = 9,50311, log. cotang. 39°, 10′ = 10,08905. Für einen Winkel über 45° findet man hingegen die entsprechende trigonometrische Linie oder deren Logarithmen, wenn man die gegebene Grad- und Minutenzahl in den hintersten Vertikalkolumnen aufsucht, und von da aus horizontal herüber geht, bis man in die Vertikalkolumne kommt, an deren Fuss der Name der gesuchten Linie steht. Hiernach findet man in der ersten Tabelle sin. 48°, 10′ = 0,7451, und cos. 48°, 10′ = 0,6670, weil diese Zahlen in der Zeile stehen, an deren Ende 48°, 10′ zu lesen ist und zugleich in Vertikalreihen enthalten sind, an deren Fuss die Namen Sinus und Cosinus zu finden sind. Ebenso findet man cos. 61°, 30′ = 0,4772, tang. 61°, 30′ = 1,8418, und cotang. 76°, 40′ = 0,2370. Auf gleiche Weise findet man in der zweiten Tabelle log. sin. 50°, 40′ = 9,88844, log. tang. 50°, 40′ = 10,08647, log. cos. 81°, 10′ = 9,18628, log. cotang. 68°, 30′ = 9,59540.

Uebrigens ist sin. 50°, 40′ auch = cos. 39°, 20′, ferner cos. 61°, 30′ = sin. 28°, 30′ cotang. 68°, 30′ = tang. 21°, 30′ u. s. w., weil von zwei Winkeln, deren Summe 90° beträgt, der Sinus des einen gleich dem Cosinus des andern, auch Tangente des einen gleich Cotangente des andern ist u. s. w.

Sind die Winkel bis auf Minuten genau gegeben, so hat man die in den Tabellen enthaltenen Werthe der trigonometrischen Linien mit Hilfe der Differenzen zu ergänzen, indem man das Interpolationsverfahren einschlägt. Hiernach ist:

$$\sin. 18^0, 13' = \sin. 18^0, 10' + 0{,}3 \cdot 28 = \begin{Bmatrix} 0{,}3118 \\ \cdot\cdot\cdot 8 \end{Bmatrix} = 0{,}3126;$$

$$\sin.\ 56^0,\ 27' = \begin{Bmatrix} 0{,}8323 \\ \cdot\cdot 11 \end{Bmatrix} = 0{,}8334,$$

$$\text{tang.}\ 43^0,\ 34' = \begin{Bmatrix} 0{,}9490 \\ \cdot\cdot 22 \end{Bmatrix} = 0{,}9512, \text{ ferner}$$

$$\log.\sin. 26^0, 16' = 9{,}64442 + 0{,}6 \cdot 256 = \begin{Bmatrix} 9{,}64442 \\ 154 \end{Bmatrix} = 9{,}64596,$$

$$\log.\ \text{tang.}\ 46^0,\ 21' = \begin{Bmatrix} 10{,}02022 \\ 25 \end{Bmatrix} = 10{,}02047,$$

Da der Cosinus und die Cotangente abnehmen, wenn der Winkel wächst, so hat man bei denselben die Tabellenwerthe durch Subtraktion zu korrigiren. Es ist hiernach

$$\cos. 18^0, 14' = \cos. 18^0, 14' - 0{,}4 \,.\, 9 = \begin{Bmatrix} 0{,}9502 \\ 4 \end{Bmatrix} = 0{,}9498;$$

$$\cos.\ 63^0,\ 25' = \begin{Bmatrix} 0{,}4488 \\ 13 \end{Bmatrix} = 0{,}4475,$$

$$\text{cotang.}\ 34^0, 28' = \begin{Bmatrix} 1{,}4641 \\ 73 \end{Bmatrix} = 1{,}4568, \text{ ferner}$$

$$\log.\ \cos.\ 35^0,\ 52' = \begin{Bmatrix} 9{,}90887 \\ 18 \end{Bmatrix} = 9{,}90869, \text{ und}$$

$$\log.\ \text{cotang.}\ 62^0,\ 37' = \begin{Bmatrix} 9{,}71648 \\ 217 \end{Bmatrix} = 9{,}71431.$$

Umgekehrt dienen die in Rede stehenden Tabellen auch dazu, um aus einer gegebenen trigonometrischen Linie oder ihrem Logarithmus den entsprechenden Winkel zu finden. In diesem Falle sucht man den gegebenen Zahlenwerth in derjenigen Vertikalkolumne auf, welche den Namen desselben am Kopfe oder Fusse trägt, und geht von da links oder rechts herüber in die Grad- und Minutenkolumnen. Hiernach ist z. B.

für $\sin. x = 0{,}5568$, $x = 33^0, 50'$,

für sin. $x = 0{,}7916$, $x = 52^\circ, 20'$,
für cos. $x = 0{,}7604$, $x = 40^\circ, 30'$,
für tang. $x = 2{,}6746$, $x = 69^\circ, 30'$,
für cotang. $x = 1{,}5301$, $x = 33^\circ, 10'$; ferner
für log. sin. $x = 9{,}29340$, $x = 11^\circ, 20'$,
für log. sin. $x = 9{,}98901$, $x = 77^\circ, 10'$,
für log. tang. $x = 10{,}47548$, $x = 71^\circ, 30'$,
für log. cotang. $x = 9{,}98484$, $x = 46^\circ, 0'$.

In der Regel ist die gegebene Grösse nicht genau in den Tabellen enthalten, und daher zur schärfern Bestimmung des Winkels das Interpoliren anzuwenden. Bei den Sinus und Tangenten nehme man den der nächst kleineren, bei den Cosinus und Cotangenten aber den der nächst grösseren Zahl entsprechenden Winkel; dann dividire man die zehnfache Differenz beider Zahlen durch die Differenz, welche die Tafeln für zwei benachbarte Zahlen angeben, und endlich setze man den Quotienten zu den Minuten des erst aus den Tafeln genommenen Winkels. So ist z. B. für

$$\sin. x = 0{,}3679,\ x = 21^\circ, 30, + (3679 - 3665) \cdot \frac{10'}{27}$$

$$= 21^\circ, 30' + \frac{140'}{27} = 21^\circ, 35', 2;$$ nämlich der nächst kleineren Zahl 0,3665 entspricht $x = 21^\circ, 30'$, der Quotient aus der zehnfachen Differenz von dieser und der gegebenen Zahl 0,3679 ist 140 und die von der Tabelle angegebene Differenz ist 27, folglich der Quotient beider $= 5{,}2$. Wenn ferner tang. $x = 0{,}9152$ ist, so hat man

$$x = 42^\circ, 20' + (52 - 10)\,\frac{10'}{53} = \left\{ \begin{matrix} 42^\circ, 20' \\ 8 \end{matrix} \right\} = 42^\circ, 28':$$

wenn cos. $x = 0{,}6095$, so hat man $x = 52^\circ, 20' + (111 - 95)\frac{10}{23}$

$$= \left\{ \begin{matrix} 52^\circ, 20' \\ 7 \end{matrix} \right\} = 52^\circ, 27',$$ und wenn cotang. $x = 1{,}5630$ ist, so folgt $x = 32^\circ, 30' + (697 - 630)\,\dfrac{10'}{101}$

$= \left\{\begin{matrix} 32^0, 30' \\ \quad 6{,}6 \end{matrix}\right\} = 32^0, 36', 6.$ Ferner für log. sin. x = 9,75344 ist $x = 34^0, 30' + (44-13)\,\frac{10'}{183} = \left\{\begin{matrix} 34^0, 30' \\ \quad 1', 7 \end{matrix}\right\} = 34^0, 31', 7;$ für log. tang. x = 11,12537, $x = 85^0, 40' + (537-047)\,\frac{10'}{1710}$ $= \left\{\begin{matrix} 85^0, 40' \\ \quad 3' \end{matrix}\right\} = 85^0, 43';$ für log. cos. x = 9,72104 ist $x = 5^0, 10' + \frac{2180-1040}{204} = \left\{\begin{matrix} 58^0, 10' \\ \quad 5 \end{matrix}\right\} = 58^0, 15';$ endlich für log. cotang. x = 10,28853,

$x = 27^0, 10' + \frac{9720-8530}{311} = \left\{\begin{matrix} 27^0, 10' \\ \quad 3{,}5 \end{matrix}\right\} = 27^0, 13', 5.$

---

1. Tafel der trigonometrischen Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
0	0	0,0000	1,0000	0,0000	∞	90	0
	10	0,0029	1,0000	0,0029	343,77		50
	20	0,0058	1,0000	0,0058	171,89		40
	30	0,0087	1,0000	0,0087	114,59		30
	40	0,0116	0,9999	0,0116	85,940		20
	50	0,0145	0,9999	0,0145	68,750		10
		29	1	29	11,460		
1	0	0,0175	0,9998	0,0175	57,290	89	0
	10	0,0204	0,9998	0,0204	49,104		50
	20	0,0233	0,9997	0,0233	42,964		40
	30	0,0262	0,9997	0,0262	38,188		30
	40	0,0291	0,9996	0,0291	34,368		20
	50	0,0320	0,9995	0,0320	31,242		10
		29	1	29	2,606		
2	0	0,0349	0,9994	0,0349	28,636	88	0
	10	0,0378	0,9993	0,0378	26,432		50
	20	0,0407	0,9992	0,0407	24,542		40
	30	0,0436	0,9990	0,0437	22,904		30
	40	0,0465	0,9989	0,0466	21,470		20
	50	0,0494	0,9988	0,0495	20,206		10
		29	1	29	1,125		
3	0	0,0523	0,9986	0,0524	19,081	87	0
	10	0,0552	0,9985	0,0553	18,075		50
	20	0,0581	0,9983	0,0582	17,169		40
	30	0,0610	0,9981	0,0612	16,350		30
	40	0,0640	0,9980	0,0641	15,605		20
	50	0,0669	0,9978	0,0670	14,924		10
		29	2	29	623		
4	0	0,0698	0,9976	0,0699	14,301	86	0
	10	0,0727	0,9974	0,0729	13,727		50
	20	0,0756	0,9971	0,0758	13,197		40
	30	0,0785	0,9969	0,0787	12,706		30
	40	0,0814	0,9967	0,0816	12,251		20
	50	0,0843	0,9964	0,0846	11,826		10
		29	2	29	396		
5	0	0,0872	0,9962	0,0875	11,430	85	0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

1. Tafel der trigonometrischen Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
5	0	0,0872	0,9962	0,0875	11,430	85	0
	10	0,0901	0,9959	0,0904	11,059		50
	20	0,0929	0,9957	0,0934	10,712		40
	30	0,0958	0,9954	0,0963	10,385		30
	40	0,0987	0,9951	0,0992	10,078		20
	50	0,1016	0,9948	0,1022	9,7882		10
		29	3	29	2738		
6	0	0,1045	0,9945	0,1051	9,5144	84	0
	10	0,1074	0.9942	0,1080	9,2553		50
	20	0,1103	0.9939	0,1110	9,0098		40
	30	0,1132	0.9936	0,1139	8,7769		30
	40	0,1161	0,9932	0,1169	8,5555		20
	50	0,1190	0,9929	0,1198	8,3450		10
		29	4	29	2007		
7	0	0,1219	0,9925	0,1228	8,1443	83	0
	10	0,1248	0,9922	0,1257	7,9530		50
	20	0,1276	0,9918	0,1287	7,7704		40
	30	0,1305	0,9914	0,1317	7,5958		30
	40	0,1334	0,9911	0,1346	7,4287		20
	50	0,1363	0,9907	0,1376	7,2687		10
		29	4	29	1533		
8	0	0,1392	0,9903	0,1405	7,1154	82	0
	10	0,1421	0,9899	0,1435	6,9682		50
	20	0,1449	0,9894	0,1465	6,8269		40
	30	0,1478	0,9890	0,1495	6,6912		30
	40	0,1507	0,9886	0,1524	6,5606		20
	50	0,1536	0,9881	0,1554	6,4348		10
		28	4	30	1210		
9	0	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138	81	0
	10	0,1593	0,9872	0,1614	6,1970		50
	20	0,1622	0,9868	0,1644	6,0844		40
	30	0,1650	0,9863	0,1673	5,9758		30
	40	0,1679	0,9858	0,1703	5,8708		20
	50	0,1708	0,9853	0,1733	5,7694		10
		28	5	30	981		
10	0	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	80	0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

1. Tafel der trigonometrischen Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
0	0	0,0000	1,0000	0,0000	∞	90	0
	10	0,0029	1,0000	0,0029	343,77		50
	20	0,0058	1,0000	0,0058	171,89		40
	30	0,0087	1,0000	0,0087	114,59		30
	40	0,0116	0,9999	0,0116	85,940		20
	50	0,0145	0,9999	0,0145	68,750		10
		29	1	29	11,460		
1	0	0,0175	0,9998	0,0175	57,290	89	0
	10	0,0204	0,9998	0,0204	49,104		50
	20	0,0233	0,9997	0,0233	42,964		40
	30	0,0262	0,9997	0,0262	38,188		30
	40	0,0291	0,9996	0,0291	34,368		20
	50	0,0320	0,9995	0,0320	31,242		10
		29	1	29	2,606		
2	0	0,0349	0,9994	0,0349	28,636	88	0
	10	0,0378	0,9993	0,0378	26,432		50
	20	0,0407	0,9992	0.0407	24,542		40
	30	0,0436	0,9990	0,0437	22,904		30
	40	0,0465	0,9989	0,0466	21,470		20
	50	0,0494	0,9988	0,0495	20,206		10
		29	1	29	1,125		
3	0	0,0523	0,9986	0,0524	19,081	87	0
	10	0,0552	0,9985	0,0553	18,075		50
	20	0,0581	0,9983	0,0582	17,169		40
	30	0,0610	0,9981	0,0612	16,350		30
	40	0,0640	0,9980	0,0641	15,605		20
	50	0,0669	0,9978	0,0670	14,924		10
		29	2	29	623		
4	0	0,0698	0,9976	0,0699	14,301	86	0
	10	0,0727	0,9974	0,0729	13,727		50
	20	0,0756	0,9971	0,0758	13,197		40
	30	0,0785	0,9969	0,0787	12,706		30
	40	0,0814	0,9967	0,0816	12,251		20
	50	0,0843	0,9964	0,0846	11,826		10
		29	2	29	396		
5	0	0,0872	0,9962	0,0875	11,430	85	0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

1. Tafel der trigonometrischen Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
5	0	0,0872	0,9962	0,0875	11,430	85	0
	10	0,0901	0,9959	0,0904	11,059		50
	20	0,0929	0,9957	0,0934	10,712		40
	30	0,0958	0,9954	0,0963	10,385		30
	40	0,0987	0,9951	0,0992	10,078		20
	50	0,1016	0,9948	0,1022	9,7882		10
		29	3	29	2738		
6	0	0,1045	0,9945	0,1051	9,5144	84	0
	10	0,1074	0.9942	0,1080	9,2553		50
	20	0,1103	0,9939	0,1110	9,0098		40
	30	0,1132	0.9936	0,1139	8,7769		30
	40	0,1161	0,9932	0,1169	8,5555		20
	50	0,1190	0,9929	0,1198	8,3450		10
		29	4	29	2007		
7	0	0,1219	0,9925	0,1228	8,1443	83	0
	10	0,1248	0,9922	0,1257	7,9530		50
	20	0,1276	0,9918	0,1287	7,7704		40
	30	0,1305	0,9914	0,1317	7,5958		30
	40	0,1334	0,9911	0,1346	7,4287		20
	50	0,1363	0,9907	0,1376	7,2687		10
		29	4	29	1533		
8	0	0,1392	0,9903	0,1405	7,1154	82	0
	10	0,1421	0,9899	0,1435	6,9682		50
	20	0,1449	0,9894	0,1465	6,8269		40
	30	0,1478	0,9890	0,1495	6,6912		30
	40	0,1507	0,9886	0,1524	6,5606		20
	50	0,1536	0,9881	0,1554	6,4348		10
		28	4	30	1210		
9	0	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138	81	0
	10	0,1593	0,9872	0,1614	6,1970		50
	20	0,1622	0,9868	0,1644	6,0844		40
	30	0,1650	0,9863	0,1673	5,9758		30
	40	0,1679	0,9858	0,1703	5,8708		20
	50	0,1708	0,9853	0,1733	5,7694		10
		28	5	30	981		
10	0	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	80	0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

1. Tafel der trigonometrischen Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
10	0	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	80	0
	10	0,1765	0,9843	0,1793	5,5764		50
	20	0,1794	0,9838	0,1823	5,4845		40
	30	0,1822	0,9833	0,1853	5,3955		30
	40	0,1851	0,9827	0,1883	5,3093		20
	50	0,1880	0,9822	0,1914	5,2257		10
		28	6	30	811		
11	0	0,1908	0,9816	0,1944	5,1446	79	0
	10	0,1937	0.9811	0,1974	5,0658		50
	20	0,1965	0,9805	0,2004	4,9894		40
	30	0,1994	0,9799	0,2035	4,9152		30
	40	0,2022	0,9793	0,2065	4,8430		20
	50	0,2051	0,9787	0,2095	4,7729		10
		28	6	31	683		
12	0	0,2079	0,9781	0,2126	4,7046	78	0
	10	0,2108	0,9775	0,2156	4,6382		50
	20	0,2136	0,9769	0,2186	4,5736		40
	30	0,2164	0,9763	0,2217	4,5107		30
	40	0,2193	0,9757	0,2247	4,4494		20
	50	0,2221	0,9750	0,2278	4,3897		10
		28	6	31	582		
13	0	0,2250	0,9744	0,2309	4,3315	77	0
	10	0,2278	0,9737	0,2339	4,2747		50
	20	0,2306	0,9730	0,2370	4,2193		40
	30	0,2334	0,9724	0,2401	4,1653		30
	40	0,2363	0,9717	0,2432	4,1126		20
	50	0,2391	0,9710	0,2462	4,0611		10
		28	7	31	503		
14	0	0,2419	0,9703	0,2493	4,0108	76	0
	10	0,2447	0,9696	0,2524	3,9617		50
	20	0,2476	0,9689	0,2555	3,9136		40
	30	0,2504	0,9681	0,2586	3,8667		30
	40	0,2532	0,9674	0,2617	3,8208		20
	50	0,2560	0,9667	0,2648	3,7760		10
		28	7	31	439		
15	0	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321	75	0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

1) Tafel der trigonometrischen Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
15	0	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321	75	0
	10	0,2616	0,9652	0,2711	3,6891		50
	20	0,2644	0,9644	0,2742	3,6470		40
	30	0,2672	0,9636	0,2773	3,6059		30
	40	0,2700	0,9628	0,2805	3,5656		20
	50	0,2728	0,9621	0,2836	3,5261		10
		28	8	31	387		
16	0	0,2756	0,9613	0,2867	3,4874	74	0
	10	0,2784	0,9605	0,2899	3,4495		50
	20	0,2812	0,9596	0,2931	3,4124		40
	30	0,2840	0,9588	0,2962	3,3759		30
	40	0,2868	0,9580	0,2994	3,3402		20
	50	0,2896	0,9572	0,3026	3,3052		10
		28	9	31	343		
17	0	0,2924	0,9563	0,3057	3,2709	73	0
	10	0,2952	0,9555	0,3089	3,2371		50
	20	0,2979	0,9546	0,3121	3,2041		40
	30	0,3007	0,9537	0,3153	3,1716		30
	40	0,3035	0,9528	0,3185	3,1397		20
	50	0,3062	0,9520	0,3217	3,1084		10
		28	9	32	307		
18	0	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	72	0
	10	0,3118	0,9502	0,3281	3,0475		50
	20	0,3145	0,9492	0,3314	3,0178		40
	30	0,3173	0,9483	0,3346	2,9887		30
	40	0,3201	0,9474	0,3378	2,9600		20
	50	0,3228	0,9465	0,3411	2,9319		10
		27	10	32	277		
19	0	0,3256	0,9455	0,3443	2,9042	71	0
	10	0,3283	0,9446	0,3476	2,8770		50
	20	0,3311	0,9436	0,3508	2,8502		40
	30	0,3338	0,9426	0,3541	2,8239		30
	40	0,3365	0,9417	0,3574	2,7980		20
	50	0,3393	0,9407	0,3607	2,7725		10
		27	10	33	250		
20	0	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475	70	0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

1. Tafel der trigonometrischen Linien.

Winkel. Gr.	Winkel. Min.	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel. Gr.	Winkel. Min.
20	0	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475	70	0
	10	0,3448	0,9387	0,3673	2,7228		50
	20	0,3475	0,9377	0,3706	2,6985		40
	30	0,3502	0,9367	0,3739	2,6746		30
	40	0,3529	0,9356	0,3772	2,6511		20
	50	0,3557	0,9346	0,3805	2,6279		10
		27	10	34	228		
21	0	0,3584	0,9336	0,3839	2,6051	69	0
	10	0,3611	0,9325	0,3872	2,5826		50
	20	0,3638	0,9315	0,3906	2,5605		40
	30	0,3665	0,9304	0,3939	2,5386		30
	40	0,3692	0,9293	0,3973	2,5172		20
	50	0,3719	0,9283	0,4006	2,4960		10
		27	11	34	209		
22	0	0,3746	0,9272	0,4040	2,4751	68	0
	10	0,3773	0,9261	0,4074	2,4545		50
	20	0,3800	0,9250	0,4108	2,4342		40
	30	0,3827	0,9239	0,4142	2,4142		30
	40	0,3854	0,9228	0,4176	2,3945		20
	50	0,3881	0,9216	0,4210	2,3750		10
		27	11	35	191		
23	0	0,3907	0,9205	0,4245	2,3559	67	0
	10	0,3934	0,9194	0,4279	2,3369		50
	20	0,3961	0,9182	0,4314	2,3183		40
	30	0,3987	0,9171	0,4348	2,2998		30
	40	0,4014	0,9159	0,4383	2,2817		20
	50	0,4041	0,9147	0,4417	2,2637		10
		26	12	35	177		
24	0	0,4067	0,9135	0,4452	2,2460	66	0
	10	0,4094	0,9124	0,4487	2,2286		50
	20	0,4120	0,9112	0,4522	2,2113		40
	30	0,4147	0,9100	0,4557	2,1943		30
	40	0,4173	0,9088	0,4592	2,1775		20
	50	0,4200	0,9075	0,4628	2,1609		10
		26	12	35	164		
25	0	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445	65	0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

1. Tafel der trigonometrischen Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
25	0	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445	65	0
	10	0,4253	0,9051	0,4699	2,1283		50
	20	0,4279	0,9038	0,4734	2,1123		40
	30	0,4305	0,9026	0,4770	2,0965		30
	40	0,4331	0,9013	0,4806	2,0809		20
	50	0,4358	0,9001	0,4841	2,0655		10
		26	13	36	152		
26	0	0,4384	0,8988	0,4877	2,0503	64	0
	10	0,4410	0,8975	0,4913	2,0353		50
	20	0,4436	0,8962	0,4950	2,0204		40
	30	0,4462	0,8949	0,4986	2,0057		30
	40	0,4488	0,8936	0,5022	1,9912		20
	50	0,4514	0,8923	0,5059	1,9768		10
		26	13	36	142		
27	0	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	63	0
	10	0,4566	0,8897	0,5132	1,9486		50
	20	0,4592	0,8884	0,5169	1,9347		40
	30	0,4617	0,8870	0,5206	1,9210		30
	40	0,4643	0,8857	0,5243	1,9074		20
	50	0,4669	0,8843	0,5280	1,8940		10
		26	14	37	133		
28	0	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807	62	0
	10	0,4720	0,8816	0,5354	1,8676		50
	20	0,4746	0,8802	0,5392	1,8546		40
	30	0,4772	0,8788	0,5430	1,8418		30
	40	0,4797	0,8774	0,5467	1,8291		20
	50	0,4823	0,8760	0,5505	1,8165		10
		25	14	38	125		
29	0	0,4848	0,8746	0,5543	1,8040	61	0
	10	0,4874	0,8732	0,5581	1,7917		50
	20	0,4899	0,8718	0,5619	1,7796		40
	30	0,4924	0,8704	0,5658	1,7675		30
	40	0,4950	0,8689	0,5696	1,7556		20
	50	0,4975	0,8675	0,5735	1,7437		10
		25	15	39	116		
30	0	0,5000	0,8660	0,5774	1,7321	60	0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

1. Tafel der trigonometrischen Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
30	0	0,5000	0,8660	0,5774	1,7321	60	0
	10	0,5025	0,8646	0,5812	1,7205		50
	20	0,5050	0,8631	0,5851	1,7090		40
	30	0,5075	0,8616	0,5890	1,6977		30
	40	0,5100	0,8601	0,5930	1,6864		20
	50	0,5125	0,8587	0,5969	1,6753		10
		25	15	40	110		
31	0	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643	59	0
	10	0,5175	0,8557	0,6048	1,6534		50
	20	0,5200	0,8542	0,6088	1,6426		40
	30	0,5225	0,8526	0,6128	1,6319		30
	40	0,5250	0,8511	0,6168	1,6212		20
	50	0,5275	0,8496	0,6208	1,6107		10
		25	16	41	104		
32	0	0,5299	0,8480	0,6249	1,6003	58	0
	10	0,5324	0,8465	0,6289	1,5900		50
	20	0,5348	0,8450	0,6330	1,5798		40
	30	0,5373	0,8434	0,6371	1,5697		30
	40	0,5398	0,8418	0,6412	1,5597		20
	50	0,5422	0,8403	0,6453	1,5497		10
		24	16	41	98		
33	0	0,5446	0,8387	0,6494	1,5399	57	0
	10	0,5471	0,8371	0,6536	1,5301		50
	20	0,5495	0,8355	0,6577	1,5204		40
	30	0,5519	0,8339	0,6619	1,5108		30
	40	0,5544	0,8323	0,6661	1,5013		20
	50	0,5568	0,8307	0,6703	1,4919		10
		24	17	42	93		
34	0	0,5592	0,8290	0,6745	1,4826	56	0
	10	0,5616	0,8274	0,6787	1,4733		50
	20	0,5640	0,8258	0,6830	1,4641		40
	30	0,5664	0,8241	0,6873	1,4550		30
	40	0,5688	0,8225	0,6916	1,4460		20
	50	0,5712	0,8208	0,6959	1,4370		10
		24	17	43	89		
35	0	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281	55	0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

1. Tafel der trigonometrischen Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
35	0	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281	55	0
	10	0,5760	0,8175	0,7046	1,4193		50
	20	0,5783	0,8158	0,7089	1,4106		40
	30	0,5807	0,8141	0,7133	1,4019		30
	40	0,5831	0,8124	0,7177	1,3934		20
	50	0,5854	0,8107	0,7221	1,3848		10
		24	17	44	84		
36	0	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764	54	0
	10	0,5901	0,8073	0,7310	1,3680		50
	20	0,5925	0,8056	0,7355	1,3597		40
	30	0,5948	0,8039	0,7400	1,3514		30
	40	0,5972	0,8021	0,7445	1,3432		20
	50	0,5995	0,8004	0,7490	1,3351		10
		23	18	46	81		
37	0	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270	53	0
	10	0,6041	0,7969	0,7581	1,3190		50
	20	0,6065	0,7951	0,7627	1,3111		40
	30	0,6088	0,7934	0,7673	1,3032		30
	40	0,6111	0,7916	0,7720	1,2954		20
	50	0,6134	0,7898	0,7766	1,2876		10
		23	18	47	77		
38	0	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799	52	0
	10	0,6180	0,7862	0,7860	1,2723		50
	20	0,6202	0,7844	0,7907	1,2647		40
	30	0,6225	0,7826	0,7954	1,2572		30
	40	0,6248	0,7808	0,8002	1,2497		20
	50	0,6271	0,7790	0,8050	1,2423		10
		23	19	48	74		
39	0	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349	51	0
	10	0,6316	0,7753	0,8146	1,2276		50
	20	0,6338	0,7735	0,8195	1,2203		40
	30	0,6361	0,7716	0,8243	1,2131		30
	40	0,6383	0,7698	0,8292	1,2059		20
	50	0,6406	0,7679	0,8342	1,1988		10
		22	19	49	70		
40	0	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	50	0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

1. Tafel der trigonometrischen Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
40	0	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	50	0
	10	0,6450	0,7642	0,8441	1,1847		50
	20	0,6472	0,7623	0,8491	1,1778		40
	30	0,6494	0,7604	0,8541	1,1708		30
	40	0,6517	0,7585	0,8591	1,1640		20
	50	0,6539	0,7566	0,8642	1,1571		10
		22	19	51	67		
41	0	0,6561	0,7547	0,8693	1,1504	49	0
	10	0,6583	0,7528	0,8744	1,1436		50
	20	0,6604	0,7509	0,8796	1,1369		40
	30	0,6626	0,7490	0,8847	1,1303		30
	40	0,6648	0,7470	0,8899	1,1237		20
	50	0,6670	0,7451	0,8952	1,1171		10
		21	20	52	65		
42	0	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106	48	0
	10	0,6713	0,7412	0,9057	1,1041		50
	20	0,6734	0,7392	0,9110	1,0977		40
	30	0,6756	0,7373	0,9163	1,0913		30
	40	0,6777	0,7353	0,9217	1,0850		20
	50	0,6799	0,7333	0,9271	1,0786		10
		21	20	54	62		
43	0	0,6820	0,7314	0,9325	1,0724	47	0
	10	0,6841	0,7294	0,9380	1,0661		50
	20	0,6862	0,7274	0,9435	1,0599		40
	30	0,6884	0,7254	0,9490	1,0538		30
	40	0,6905	0,7234	0,9545	1,0477		20
	50	0,6926	0,7214	0,9601	1,0416		10
		21	21	56	61		
44	0	0,6947	0,7193	0,9657	1,0355	46	0
	10	0,6967	0,7173	0,9713	1,0295		50
	20	0,6988	0,7153	0,9770	1,0235		40
	30	0,7009	0,7133	0,9827	1,0176		30
	40	0,7030	0,7112	0,9884	1,0117		20
	50	0,7050	0,7092	0,9942	1,0058		10
		21	21	58	58		
45	0	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000	45	0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

2. Tafel der Logarithmen trigonometrischer Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
0	0	$-\infty$	10,00000	$-\infty$	$+\infty$	90	0
	10	7,46373	10,00000	7,46373	12,53627		50
	20	7,76475	9,99999	7,76476	12,23524		40
	30	7,94084	9,99998	7,94086	12,05914		30
	40	8,06578	9,99997	8,06581	11,93419		20
	50	8,16268	9,99995	8,16273	11,83727		10
		7918	2	7919	7919		
1	0	8,24186	9,99993	8,24192	11,75808	89	0
	10	8,30879	9,99991	8,30888	11,69112		50
	20	8,36678	9,99988	8,36689	11,63311		40
	30	8,41792	9,99985	8,41807	11,58193		30
	40	8,46366	9,99982	8,46385	11,53615		20
	50	8,50504	9,99978	8,50527	11,49473		10
		3778	4	3781	3781		
2	0	8,54282	9,99974	8,54308	11,45692	88	0
	10	8,57757	9,99969	8,57788	11,42212		50
	20	8,60973	9,99964	8,61009	11,38991		40
	30	8,63968	9,99959	8,64009	11,35991		30
	40	8,66769	9,99953	8,66816	11,33184		20
	50	8,69400	9,99947	8,69453	11,30547		10
		2480	7	2487	2487		
3	0	8,71880	9,99940	8,71940	11,28060	87	0
	10	8,74226	9,99934	8,74292	11,25708		50
	20	8,76451	9,99926	8,76525	11,23475		40
	30	8,78568	9,99919	8,78649	11,21351		30
	40	8,80585	9,99911	8,80674	11,19326		20
	50	8,82513	9,99903	8,82610	11,17390		10
		1845	9	1854	1854		
4	0	8,84358	9,99894	8,84464	11,15536	86	0
	10	8,86128	9,99885	8,86243	11,13757		50
	20	8,87829	9,99876	8,87953	11,12047		40
	30	8,89464	9,99866	8,89598	11,10402		30
	40	8,91040	9,99856	8,91185	11,08815		20
	50	8,92561	9,99845	8,92716	11,07284		10
		1469	11	1479	1479		
5	0	8,94030	9,99834	8,94195	11,05805	85	0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

2. Tafel der Logarithmen trigonometrischer Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
5	0	8,94030	9,99834	8,94195	11,05805	85	0
	10	8,95450	9,99823	8,95627	11,04373		50
	20	8,96825	9,99812	8,97013	11,02987		40
	30	8,98157	9,99800	8,98358	11,01642		30
	40	8,99450	9,99787	8,99662	11,00338		20
	50	9,00704	9,99775	9,00930	10,99070		10
		1219	14	1232	1232		
6	0	9,01923	9,99761	9,02162	10,97838	84	0
	10	9,03109	9,99748	9,03361	10,96639		50
	20	9,04262	9,99734	9,04528	10,95472		40
	30	9,05386	9,99720	9,05666	10,94334		30
	40	9,06481	9,99705	9,06775	10,93225		20
	50	9,07548	9,99690	9,07858	10,92142		10
		1041	15	1056	1056		
7	0	9,08589	9,99675	9,08914	10,91086	83	0
	10	9,09606	9,99659	9,09947	10,90053		50
	20	9,10599	9,99643	9,10956	10,89044		40
	30	9,11570	9,99627	9,11943	10,88057		30
	40	9,12519	9,99610	9,12909	10,87091		20
	50	9,13447	9,99593	9,13854	10,86146		10
		909	18	926	926		
8	0	9,14356	9,99575	9,14780	10,85220	82	0
	10	9,15245	9,99557	9,15688	10,84312		50
	20	9,16116	9,99539	9,16577	10,83423		40
	30	9,16970	9,99520	9,17450	10,82550		30
	40	9,17807	9,99501	9,18306	10,81694		20
	59	9,18628	9,99482	9,19146	10,80854		10
		805	20	825	825		
9	0	9,19433	9,99462	9,19971	10,80029	81	0
	10	9,20223	9,99442	9,20782	10,79218		50
	20	9,20999	9,99421	9,21578	10,78422		40
	30	9,21761	9,99400	9,22361	10,77639		30
	40	9,22509	9,99379	9,23130	10,76870		20
	50	9,23244	9,99357	9,23887	10,76113		10
		723	22	745	745		
10	0	9,23967	9,99835	9,24632	10,75368	80	0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

2. Tafel der Logarithmen trigonometrischer Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
10	0	9,23967	9,99335	9,24632	10,75368	80	0
	10	9,24677	9,99313	9,25365	10,74635		50
	20	9,25376	9,99290	9,26086	10,73914		40
	30	9,26063	9,99267	9,26797	10,73203		30
	40	9,26739	9,99243	9,27496	10,72504		20
	50	9,27405	9,99219	9,28186	10,71814		10
		655	24	679	679		
11	0	9,28060	9,99195	9,28865	10,71135	79	0
	10	9,28705	9,99170	9,29535	10,70465		50
	20	9,29340	9,99145	9,30195	10,69805		40
	30	9,29966	9,99119	9,30846	10,69154		30
	40	9,30582	9,99093	9,31489	10,68511		20
	50	9,31189	9,99067	9,32122	10,67878		10
		599	27	625	625		
12	0	9,31788	9,99040	9,32747	10,67253	78	0
	10	9,32378	9,99013	9,33365	10,66635		50
	20	9,32960	9,98986	9,33974	10,66026		40
	30	9,33534	9,98958	9,34576	10,65424		30
	40	9,34100	9,98930	9,35170	10,64830		20
	50	9,34658	9,98901	9,35757	10,64243		10
		551	29	579	579		
13	0	9,35209	9,98872	9,36336	10,63664	77	0
	10	9,35752	9,98843	9,36909	10,63091		50
	20	9,36289	9,98813	9,37476	10,62524		40
	30	9,36819	9,98783	9,38035	10,61965		30
	40	9,37341	9,98753	9,38589	10,61411		20
	50	9,37858	9,98722	9,39136	10,60864		10
		510	32	541	541		
14	0	9.38368	9,98690	9,39677	10,60323	76	0
	10	9,38871	9,98659	9,40212	10,59788		50
	20	9,39369	9,98627	9,40742	10,59258		40
	30	9,39860	9,98594	9,41266	10,58734		30
	40	9,40346	9,98561	9,41784	10,58216		20
	50	9,40825	9,98528	9,42297	10,57703		10
		475	34	508	508		
15	0	9,41300	9,98494	9,42805	10,57195	75	0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

2. Tafel der Logarithmen trigonometrischer Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
15	0	9,41300	9,98494	9,42805	10,57195	75	0
	10	9,41768	9,98460	9,43308	10,56692		50
	20	9,42232	9,98426	9,43806	10,56194		40
	30	9,42690	9,98391	9,44299	10,55701		30
	40	9,43143	9,98356	9,44787	10,55213		20
	50	9,43591	9,98320	9,45271	10,54729		10
		443	36	479	479		
16	0	9,44034	9,98284	9,45750	10,54250	74	0
	10	9,44472	9,98248	9,46224	10,53776		50
	20	9,44905	9,98211	9,46694	10,53306		40
	30	9,45334	9,98174	9,47160	10,52840		30
	40	9,45758	9,98136	9,47622	10,52378		20
	50	9,46178	9,98098	9,48080	10,51920		10
		416	38	454	454		
17	0	9,46594	9,98060	9,48534	10,51466	73	0
	10	9,47005	9,98021	9,48984	10,51016		50
	20	9,47411	9,97982	9,49430	10,50570		40
	30	9,47814	9,97942	9,49872	10,50128		30
	40	9,48213	9,97902	9,50311	10,49689		20
	50	9,48607	9,97861	9,50746	10,49254		10
		391	40	432	432		
18	0	9,48998	9,97821	9,51178	10,48822	72	0
	10	9,49385	9,97779	9,51606	10,48394		50
	20	9,49768	9,97738	9,52031	10,47969		40
	30	9,50148	9,97696	9,52452	10,47548		30
	40	9,50523	9,97653	9,52870	10,47130		20
	50	9,50896	9,97610	9,53285	10,46715		10
		368	43	412	412		
19	0	9,51264	9,97567	9,53697	10,46303	71	0
	10	9,51629	9,97523	9,54106	10,45894		50
	20	9,51991	9,97479	9,54512	10,45488		40
	30	9,52350	9,97435	9,54915	10,45085		30
	40	9,52705	9,97390	9,55315	10,44685		20
	50	9,53057	9,97344	9,55712	10,44288		10
		348	45	395	395		
20	0	9,53405	9,97299	9,56107	10,43893	70	0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

2. Tafel der Logarithmen trigonometrischer Linien.

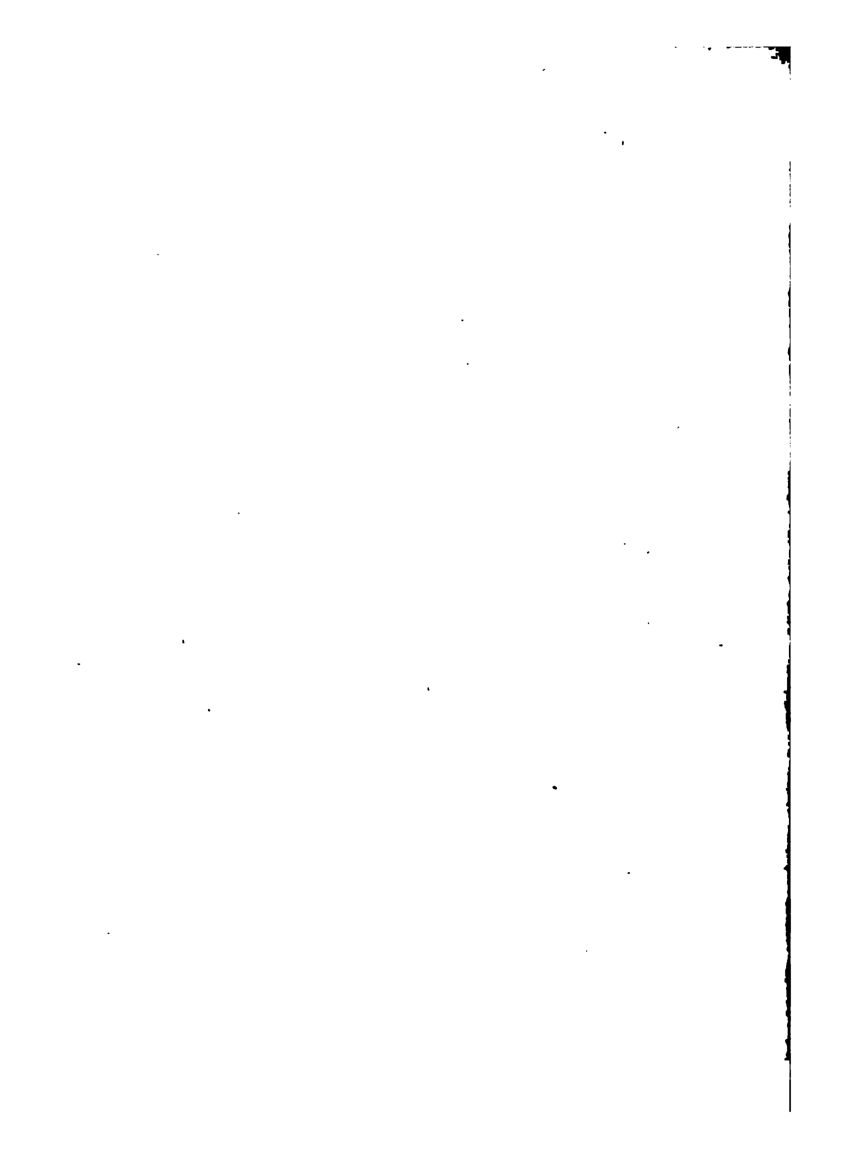
Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
20	0	9,53405	9,97299	9,56107	10,43893	70	0
	10	9,53751	9,97252	9,56498	10,43502		50
	20	9,54093	9,97206	9,56887	10,43113		40
	30	9,54433	9,97159	9,57274	10,42726		30
	40	9,54769	9,97111	9,57658	10,42342		20
	50	9,55102	9,97063	9,58039	10,41961		10
		331	48	379	379		
21	0	9,55433	9,97015	9,58418	10,41582	69	0
	10	9,55761	9,96966	9,58794	10,41206		50
	20	9,56085	9,96917	9,59168	10,40832		40
	30	9,56408	9,96868	9,59540	10,40460		30
	40	9,56727	9,96818	9,59909	10,40091		20
	50	9,57044	9,96767	9,60276	10,39724		10
		314	50	365	365		
22	0	9,57358	9,96717	9,60641	10,39359	68	0
	10	9,57669	9,96665	9,61004	10,38996		50
	20	9,57978	9,96614	9,61364	10,38636		40
	30	9,58284	9,96562	9,61722	10,38278		30
	40	9,58588	9,96509	9,62079	10,37921		20
	50	9,58889	9,96456	9,62433	10,37567		10
		299	53	352	352		
23	0	9,59188	9,96403	9,62785	10,37215	67	0
	10	9,59484	9,96349	9,63135	10,36865		50
	20	9,59778	9,96294	9,63484	10,36516		40
	30	9,60070	9,96240	9,63830	10,36170		30
	40	9,60359	9,96185	9,64175	10,35825		20
	50	9,60646	9,96129	9,64517	10,35483		10
		285	56	341	341		
24	0	9,60931	9,96073	9,64858	10,35142	66	0
	10	9,61214	9,96017	9,65197	10,34803		50
	20	9,61494	9,95960	9,65535	10,34465		40
	30	9,61773	9,95902	9,65870	10,34130		30
	40	9,62049	9,95845	9,66204	10,33796		20
	50	9,62323	9,95786	9,66537	10,33463		10
		272	58	330	330		
25	0	9,62595	9,95728	9,66867	10,33133	65	0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

2. Tafel der Logarithmen trigonometrischer Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
25	0	9,62595	9,95728	9,66867	10,33133	65	0
	10	9,62865	9,95668	9,67196	10,32804		50
	20	9,63133	9,95609	9,67524	10,32476		40
	30	9,63398	9,95549	9,67850	10,32150		30
	40	9,63662	9,95488	9,68174	10,31826		20
	50	9,63924	9,95427	9,68497	10,31503		10
		260	61	321	321		
26	0	9,64184	9,95366	9,68818	10,31182	64	0
	10	9,64442	9,95304	9,69138	10,30862		50
	20	9,64698	9,95242	9,69457	10,30543		40
	30	9,64953	9,95179	9,69774	10,30226		30
	40	9,65205	9,95116	9,70089	10,29911		20
	50	9,65456	9,95052	9,70404	10,29596		10
		249	64	313	313		
27	0	9,65705	9,94988	9,70717	10,29283	63	0
	10	9,65952	9,94923	9,71028	10,28972		50
	20	9,66197	9,94858	9,71339	10,28661		40
	30	9,66441	9,94793	9,71648	10,28352		30
	40	9,66682	9,94727	9,71955	10,28045		20
	50	9,66923	9,94660	9,72262	10,27738		10
		238	67	305	305		
28	0	9,67161	9,94593	9,72567	10,27433	62	0
	10	9,67398	9,94526	9,72872	10,27128		50
	20	9,67633	9,94458	9,73175	10,26825		40
	30	9,67866	9,94390	9,73476	10,26524		30
	40	9,68098	9,94321	9,73777	10,26223		20
	50	9,68328	9,94252	9,74077	10,25923		10
		229	70	298	298		
29	0	9,68557	9,94182	9,74375	10,25625	61	0
	10	9,68784	9,94112	9,74673	10,25327		50
	20	9,69010	9,94041	9,74969	10,25031		40
	30	9,69234	9,93970	9,75264	10,24736		30
	40	9,69456	9,93898	9,75558	10,24442		20
	50	9,69677	9,93826	9,75852	10,24148		10
		220	73	292	292		
30	0	9,69897	9,93753	9,76144	10,23856	60	0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

2. Tafel der Logarithmen trigonometrischer Linien.

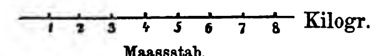
Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
30	0	9,69897	9,93753	9,76144	10,23856	60	0
	10	9,70115	9,93680	9,76435	10,23565		50
	20	9,70332	9,93606	9,76726	10,23275		40
	30	9,70547	9,93532	9,77015	10,22985		30
	40	9,70761	9,93457	9,77303	10,22697		20
	50	9,70973	9,93382	9,77591	10,22409		10
		211	75	286	286		
31	0	9,71184	9,93307	9,77877	10,22123	59	0
	10	9,71393	9,93230	9,78163	10,21837		50
	20	9,71602	9,93154	9,78448	10,21552		40
	30	9,71809	9,93077	9,78732	10,21268		30
	40	9,72014	9,92999	9,79015	10,20985		20
	50	9,72218	9,92921	9,79297	10,20703		10
		203	79	282	282		
32	0	9,72421	9,92842	9,79579	10,20421	58	0
	10	9,72622	9,92763	9,79860	10,20140		50
	20	9,72823	9,92683	9,80140	10,19860		40
	30	9,73022	9,92603	9,80419	10,19581		30
	40	9,73219	9,92522	9,80697	10,19303		20
	50	9,73416	9,92441	9,80975	10,19025		10
		195	82	277	277		
33	0	9,73611	9,92359	9,81252	10,18748	57	0
	10	9,73805	9,92277	9,81528	10,18472		50
	20	9,73997	9,92194	9,81803	10,18197		40
	30	9,74189	9,92111	9,82078	10,17922		30
	40	9,74379	9,92027	9,82352	10,17648		20
	50	9,74568	9,91942	9,82626	10,17374		10
		188	85	273	273		
34	0	9,74756	9,91857	9,82899	10,17101	56	0
	10	9,74943	9,91772	9,83171	10,16829		50
	20	9,75128	9,91686	9,83442	10,16558		40
	30	9,75313	9,91599	9,83713	10,16287		30
	40	9,75496	9,91512	9,83984	10,16016		20
	50	9,75678	9,91425	9,84254	10,15756		10
		181	89	269	269		
35	0	9,75859	9,91336	9,84523	10,15477	55	0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	



II. Abtheilung.

Mechanik.

Formeln und Lehrsätze.

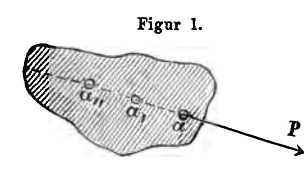


Maassstab.

1. Jede Kraft äussert sich durch einen Zug oder Druck, den sie auf einen Körper ausübt.

Dieser Druck kann durch Gewichte (Pfunde, Kilogramme etc.) gemessen werden.

Figur 1.



In Zeichnungen werden Kräfte durch Linien dargestellt und gemessen, indem man sich einen Maassstab macht, auf dem jede Einheit ein Pfund, ein Kilogramm etc. bedeutet.

Die Kraft P in Figur 1 ist z. B. 4 Kilogramm stark.

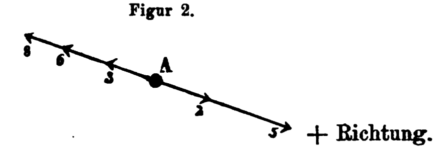
Der Punkt, in welchem ein Körper von einer Kraft ergriffen wird, heisst der Angriffspunkt der Kraft.

2. Der Angriffspunkt a einer Kraft P, Figur 1, lässt sich in der Richtung derselben beliebig verlegen, z. B.

nach a, a,, u. s. w., ohne dass die Kraft selbst dadurch in ihrer Grösse verändert wird.

3. Wirken an einem Punkte A, Figur 2, mehrere Kräfte in einer Linie, und bezeichnet man alle nach einer

Figur 2.



Richtung hin wirkenden Kräfte mit + und alle nach der entgegengesetzten Richtung wirkenden mit —, so ist die aus diesen Kräften hervorgehende Mittelkraft (Resultante) gleich:

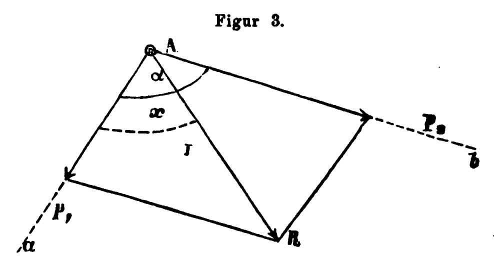
der algebraischen Summe aller Kräfte,

also in Figur 2:

$$R = + 2 - 3 + 5 - 6 - 8 = - 10,$$

d. h. R ist 10 Pfund oder Kilogramm etc. stark und hat eine Richtung nach dahin, wo das Minuszeichen steht.

Figur 3.



4. Wirken zwei Kräfte P_1 und P_2, Figur 3, an einem Punkte A unter dem $\sphericalangle\ \alpha$, so findet man die Mittelkraft R,

indem man die Kräfte P_1 und P_2 nach dem Maassstabe unter $\sphericalangle\ \alpha$ zusammenträgt, ein Parallelogramm bildet und die Diagonale A R zieht. Diese Diagonale ist = der gesuchten Mittelkraft R nach Grösse und Richtung (Parallelogramm der Kräfte).

Um die Mittelkraft durch Rechnung zu finden, hat man die Gleichung:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 \pm 2\,P_1\,P_2 \cos.\ \alpha},$$

wobei das obere Zeichen giltig ist, wenn α stumpf, das untere dagegen wenn α spitz ist.

Die Lage von R bestimmt sich durch den $\sphericalangle$ x aus der Gleichung:

$$\sin.\ x = \frac{P_2 \sin.\ \alpha}{R}.$$

Bilden die Componenten P_1 und P_2 einen rechten Winkel, so ist $\alpha = 90^0$ und cos. $\alpha = 1$, daher:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2},$$

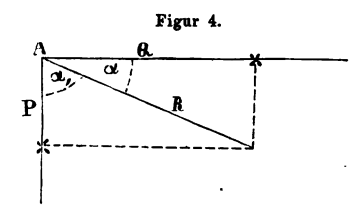
$$\sin.\ x = \frac{P_2}{R}.$$

5. Durch die umgekehrte Konstruktion und Rechnung lässt sich die Mittelkraft R in zwei Seitenkräfte (Componenten) zerlegen. Ist z. B. in Figur 3, R und P_1 gegeben und soll so zerlegt werden, dass die Seitenkraft P mit R den $\sphericalangle$ x bildet, so konstruirt man das $\triangle$ I aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen $\sphericalangle$ x, und ergänzt dann das ganze Parallelogramm. Die Seite A P_2 ist dann die gesuchte zweite Seitenkraft.

Ist ferner R und die beiden Richtungen A a und A b, in die die Mittelkraft R zerfallen soll, gegeben, so ziehe man von Punkt R aus ‖ A b und ‖ A a die Linien P_1 R und P_2 R. In dem hieraus entstehenden Parallelogramm sind die Abschnitte auf A a und A b die gesuchten Seitenkräfte.

Soll die **Mittelkraft R**, wie in **Figur 4**, in zwei **recht**winkelig zu einander stehende Seitenkräfte P und Q so

Figur 4.



zerlegt werden, dass sie mit Q den $\sphericalangle \alpha$ bildet, so geschieht dieses mittelst der vorhin angegebenen Konstruktionen. Durch Rechnung findet man:

$$Q = R \cos. \alpha,$$

$$P = R \sin. \alpha,$$

auch ist:

$$P = Q \operatorname{tang}. \alpha,$$

$$Q = P \cot. \alpha.$$

6. Wirken mehrere in einer Ebene liegenden Kräfte, Figur 5, auf einen Punkt A, so findet man die daraus entstehende Mittelkraft R durch die Konstruktion des Polygons der Kräfte auf folgende Weise.

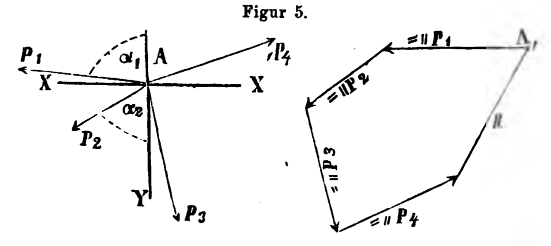
Man nehme einen willkürlichen Punkt A_1 an und bilde ein Polygon, an welchem man die Seiten immer = und ∥ den an Punkt A gegebenen Kräften P_1, P_2, P_3 u. s. w. zieht. Die Schlusslinie dieses Polygons ist = der gesuchten Mittelkraft R nach Grösse und Richtung und kann an Punkt A übertragen werden. Durch Rechnung findet man die Mittelkraft, indem man eine jede der gegebenen Kräfte in zwei rechtwinkelige Componenten nach x und y, Figur 5, zerlegt, und die Kräfte P_1, P_2, P_3 u. s. w. zunächst auf zwei rechtwinkelige Componenten P und Q reducirt. Man

hat alsdann, wenn α_1, α_2, α_3 die Neigungs ∢ der Kräfte gegen y y bezeichnet:

$$P = P_1 \sin. \alpha_1 + P_2 \sin. \alpha_2 \cdots,$$

$$Q = P_1 \cos. \alpha_1 + P_2 \sin. \alpha_2 \cdots$$

Figur 5.



und die gesuchte Mittelkraft nach Satz 4:

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2},$$

und für die Richtung von R:

$$\sin. x = \frac{P}{R}.$$

7. Wenn beliebig viele in einer Ebene wirkende Kräfte P_1, P_2, P_3 u. s. w. einen Körper in beliebigen Punkten a_1 a_2 u. s. w. ergreifen, so ist stets das Moment der Mittelkraft R = der Summe der Momente jener Kräfte, also:

$$M R = M P_1 + M P_2 + \cdots,$$

oder wenn man die Lothlinien, die von einem beliebigen Punkte d auf die Kraftrichtungen gezogen werden (Hebelarme der Kräfte) mit l, l_1, l_2 u. s. w. bezeichnet:

$$R l = P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_3 l_3 \cdots,$$

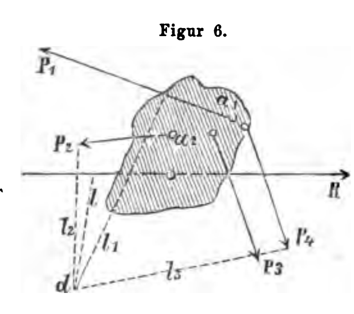
wobei man positiven und negativen Drehsinn durch + und — Zeichen zu unterscheiden hat.

8. Soll der in Figur 6 von verschiedenen Kräften ergriffene Körper gegen Drehung im Gleichgewicht sein, so muss die Summe aller Momente = Null, also:

$$P_1 l_1 + P_2 l_2 + \cdots R l = 0$$

sein.

Figur 6.



9. Soll der Körper, Figur 6, sich weder drehen noch eine Ortsbewegung machen können, so muss, wenn man alle Kräfte in vertikale und horizontale Componenten zerlegt, sein:

1. Summe aller Vertikalkräfte = Null.
2. Summe aller Horizontalkräfte = Null.
3. Summe aller Momente = Null.

10. Die Mittelkraft von Parallelkräften ist gleich der allgebraischen Summe der Componenten, also (Figur 7):

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots,$$

wobei entgegengesetzte Richtungen der Kräfte mit + und — zu bezeichnen sind.

11. Der Abstand x der Mittelkraft R paralleler Kräfte P_1, P_2, P_3 u. s. w. von einem beliebigen Punkte D ist:

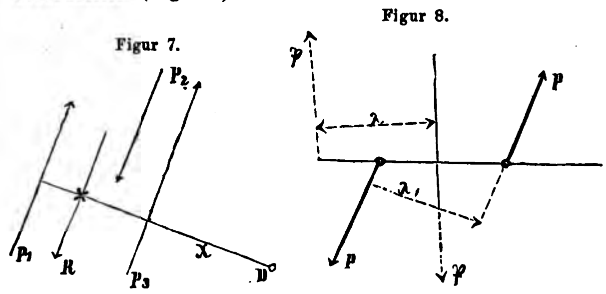
$$x = \frac{\text{Summe der Momente der Kräfte}}{\text{Summe der Kräfte.}},$$

oder:

$$x = \frac{M P_1 + M P_2 + \cdots}{P_1 + P_2 + P_3 + \cdots}.$$

12. Zwei gleiche und parallele Gegenkräfte nennt man einen Drehzwilling oder ein Kräftepaar.

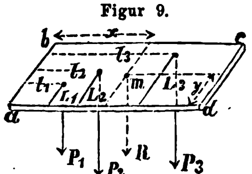
In diesem Falle existirt keine Mittelkraft. Zur Herstellung des Gleichgewichtes ist ein zweites Kräftepaar $\mathfrak{P}\,\mathfrak{P}$ erforderlich (Figur 8).



Bezeichnet man mit λ und λ_1 die Normalabstände der zu jedem Paare gehörigen Kräfte, so ist, wenn Gleichgewicht stattfinden soll:

$$\mathfrak{P}\,\lambda = \mathfrak{P}\,\lambda_1.$$

13. Wirken an einer gewichtlosen oder gleichmässig belasteten Platte, Figur 9, verschiedene Parallelkräfte P_1, P_2, P_3 alle nach einer Richtung hin, so ist der Abstand x der Mittelkraft von Kante a b:



$$x = \frac{P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_3 l_3 + \cdots}{P_1 + P_2 + P_3 + \cdots},$$

worin l_1, l_2, l_3 u. s. w. die Hebelarme der Kräfte in Bezug auf a b bezeichnet, und der Abstand y der Mittelkraft von Kante a d:

$$y = \frac{P_1 L_1 + P_2 L_2 + P_3 L_3 + \cdots}{P_1 + P_2 + P_3 + \cdots},$$

worin L_1, L_2, $L_3 \cdots$ die Hebelarme der Kräfte in Bezug auf Kante a d bezeichnet.

Durch eine Parallele im Abstande x von a b und eine zweite im Abstande y von a d ergibt sich im Durchschnittspunkte m der Angriffspunkt der Mittelkraft.

14. Ist G das Gewicht eines Körpers und p_1, p_2, $p_3 \cdots$ das Gewicht seiner einzelnen Theile, so ist:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \cdots = G$$

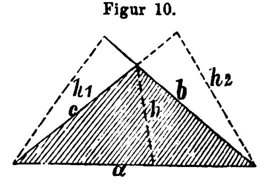
und G die Mittelkraft von p_1, p_2, p_3. Den Angriffspunkt nennt man den Schwerpunkt des Körpers.

15. Der Schwerpunkt einer geometrischen Fläche ist identisch mit dem Schwerpunkte einer unendlich dünnen Platte.

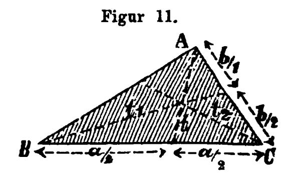
16. Jede Fläche oder jeder Körper, der im Schwerpunkte unterstützt ist, befindet sich im Gleichgewichtszustande.

Der Schwerpunkt, d. h. der Angriffspunkt der Mittelkraft G wird theoretisch ermittelt durch Berechnung des Abstandes der Mittelkraft G von mehreren Kanten nach Satz 13.

Figur 10.



Figur 11.



17. Der Schwerpunkt symetrischer Flächen und Körper, Kreis, Ellipse, reguläres Polypon, Kegel, Würfel etc. liegt im Mittelpunkte.

18. Der Abstand des Schwerpunktes eines $\triangle$, Figur 10, ist:

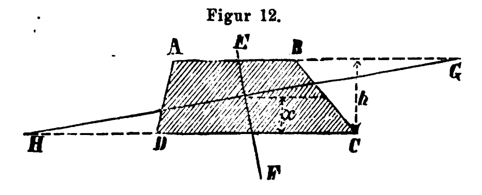
von Seite $a = \frac{1}{3} h$,
„ „ $b = \frac{1}{3} h_1$,
„ „ $c = \frac{1}{3} h_2$.

Auch liegt, Figur 11, der Schwerpunkt im Durchschnittspunkte der die Seiten halbirenden Transversalen t, t_1, t_2. Sein Abstand ist:

von Ecke $A = \frac{1}{3} t$,
„ „ $B = \frac{1}{3} t_1$,
„ „ $C = \frac{1}{3} t_2$,

19. Der Schwerpunkt s eines Trapezes wird durch folgende Konstruktion gefunden. Man halbire A B und

Figur 12.



D C und ziehe E F. Mache B G = D C und H D = A B und ziehe G H. Der Durchschnitt mit E F ist der Schwerpunkt. Sein Abstand von D C ist:

$$x = \frac{DC + 2AB}{AB + DC} \cdot \frac{h}{3}.$$

20. Den Schwerpunkt eines Viereckes findet man durch Konstruktion, indem man dasselbe in zwei △ zerlegt A C B und C D A, deren Schwerpunkte $S_{,}$ und $S_{,,}$ aufsucht, die Linie $S_{,}$, $S_{,,}$ zieht, sodann das Viereck nochmals in zwei △ △ B C D und A B D zerlegt, wiederum deren Schwerpunkte $S_{,}$ und $S_{,,}$ aufsucht und die Linie $s_{,}$, $s_{,,}$ zieht. Der Durchschnitt beider Linien $S_{,}$, $S_{,,}$

und s,, s,, ist der Schwerpunkt. Durch Rechnung findet sich der Schwerpunkt nach Satz 22.

21. Der Schwerpunkt eines Fünfecks findet sich, wenn man ein △ abschneidet, dessen Schwerpunkt und den des übrig bleibenden Vierecks aufsucht und beide verbindet — sodann ein zweites △ abschneidet, wiederum dessen Schwerpunkt und den des übrig bleibenden Vierecks aufsucht und beide verbindet. Der Durchschnitt beider Verbindungslinien ist der Schwerpunkt.

22. Der Schwerpunkt eines Polygons ergibt sich durch Fortsetzung der Konstruktion ad 21, jedoch wird dieselbe sehr weitläufig. Man bestimmt ihn daher besser durch Rechnung mit Hilfe der Parallelkräfte.

Figur 13.

Man zerlege die Figur in Dreiecke, Trapeze, Kreise oder dergleichen Figuren, deren Schwerpunkte sich leicht finden lassen und bestimme die Abstände l_I, l_{II}, l_{III} ··· l_n ··· derselben zu Kante X X und ebenso ihre Abstände L_I, L_{II}, L_{III} ··· L_n ··· zu Kante Y Y. Bedeutet F *den* Flächeninhalt des Polygons, so hat man den Schwerpunktsabstand von Kante X X:

$$x = \frac{f_I l_I + f_{II} l_I + \cdots - f_n l_n + \cdots}{F}$$

und von Kante Y Y:

$$y = \frac{f_I L_I + f_{II} L_{II} + \cdots - f_n L_n + \cdots}{F}.$$

Der Durchschnittspunkt der mit x und y zu den Kanten gezogenen Parallele ist der Schwerpunkt des Polygons.

23. Ueber die Schwerpunktslage anderer Flächen und Körper vide die Tabellen.

24. Bezeichnet bei gleichförmig beschleunigter oder verzögerter Bewegung:

c die Anfangsgeschwindigkeit,
v die Endgeschwindigkeit,
s den Weg,
t die Zeit,
p die in der Sekunde eintretende Beschleunigung oder Verzögerung,

so ist:

$$s = \frac{\pm v^2 \mp c^2}{2p},$$

$$s = c\,t \pm \frac{p\,t^2}{2},$$

$$s = \frac{v + c}{2}\,t,$$

$$v = c \pm p\,t,$$

$$v = \sqrt{\pm 2ps + c^2}.$$

Die oberen Zeichen gelten für beschleunigte, die unteren für verzögerte Bewegung.

Beim freien Fall der Körper ist:

p = 9,8088 Meter,
s = der Fallhöhe h.

Tabelle über Fallhöhen und Endgeschwindigkeiten.

Endgeschw. v Meter.	Fallhöhe h Meter.	Endgeschw. v Meter.	Fallhöhe h Meter.	Endgeschw. v Meter.	Fallhöhe h Meter.	Endgeschw. v Meter.	Fallhöhe h Meter.
0,1	0,00051	1,9	0,1840	3,7	0,698	7,5	2,867
0,2	0,00204	2,0	0,2039	3,8	0,736	8,0	3,262
0,3	0,00459	2,1	0,2248	3,9	0,775	8,5	3,682
0,4	0,00815	2,2	0,2467	4,0	0,815	9,0	4,128
0,5	0,01274	2,3	0,2696	4,1	0,857	9,5	4,600
0,6	0,01835	2,4	0,2936	4,2	0,899	10,0	5,097
0,7	0,02497	2,5	0,3186	4,3	0,942	10,5	5,619
0,8	0,03262	2,6	0,3445	4,4	0,987	11,0	6,167
0,9	0,04128	2,7	0,3716	4,5	1,032	11,5	6,741
1,0	0,05097	2,8	0,3996	4,6	1,078	12,0	7,339
1,1	0,06167	2,9	0,4286	4,7	1,126	12,5	7,964
1,2	0,07339	3,0	0,4587	4,8	1,174	13,0	8,614
1,3	0,08614	3,1	0,4898	4,9	1,224	13,5	9,289
1,4	0,09990	3,2	0,5219	5,0	1,274	14,0	9,990
1,5	0,11468	3,3	0,5550	5,5	1,542	14,5	10,716
1,6	0,13048	3,4	0,5892	6,0	1,835	15,0	11,468
1,7	0,14730	3,5	0,6244	6,5	2,153	16,0	13,048
1,8	0,16514	3,6	0,6606	7,0	2,497	17,0	14,730

25. Bei der Drehung eines Körpers um eine Axe ist zu unterscheiden:

Die Umfangsgeschwindigkeit eines Punktes auf dem Körper . . . . g,

die Winkelgeschwindigkeit des Körpers, d. h. die Bogenlänge, die ein Punkt im Abstande = 1 von der Axe in der Sekunde durchläuft . . u,

die Anzahl der Umdrehungen oder Touren pr. Min. n.

Bezeichnet z den Abstand eines gewissen Punktes von der Axe, so ist:

$$g = \frac{z \pi n}{30} = u z.$$

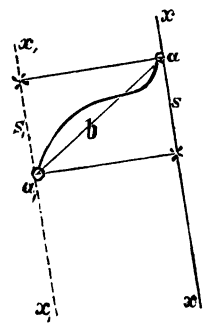
26. Die mechanische Arbeit L einer Kraft P ist das Produkt aus P und dem Wege s, den der Angriffspunkt der Kraft auf der Kraftrichtung abgelaufen hat — also:

$$L = P s.$$

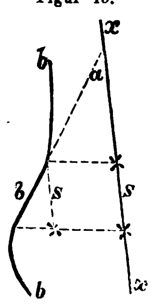
27. Der natürliche Weg des Angriffspunktes a einer Kraft P ist die Kraftrichtung x x selbst.

Aus derselben kann er indessen durch Führungen oder andere Kräfte abgelenkt werden und eine gewisse Bahn b durchlaufen.

Figur 14.



Figur 15.



Hiebei findet stets eine parallele Verschiebung der Kraftlinie x x nach x, x, statt und es ist der Weg der Kraft P:

$$= s, = s = \text{Projektion von b auf x x.}$$

28. Für eine gerade Linie und für ein kleines als erstere zu betrachtendes Bahnelement σ, dessen Tangente mit der Kraftlinie den $\sphericalangle\, \alpha$ einschliesst, ist der Weg der Kraft:

$$s = \sigma \cos. \alpha.$$

29. Die gerade Verbindungslinie w zwischen zwei Orten a und $a_{,}$ des Angriffspunktes auf der Bahn b sei der effektive Weg des Angriffspunktes genannt und sein Neigungs $\sphericalangle$ gegen x x sei $= \alpha$, so ist der Weg der Kraft:

Figur 16.

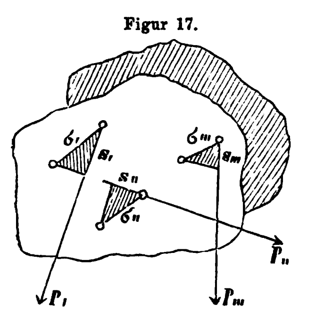
$$s = w \cos. \alpha$$

und die Arbeit mit der sich die Kraft P bei der Bewegung auf der Bahnstrecke b betheiligt hat:

$$L = P\, s = P\, w \cos. \alpha.$$

30. Ein Komplex von Kräften $P_{,}$, $P_{,,}$, $P_{,,,}$ u. s. w., die sich das Gleichgewicht halten, lässt sich durch eine unendlich kleine Kraft F um einen unendlich kleinen Weg σ verschieben oder drehen.

Figur 17.



Die hiebei geleistete Arbeit ist:

$$L = F\, s = \text{Null}.$$

Bei dieser kleinen Verschiebung beschreiben aber die Angriffspunkte der Kräfte $P_{,}$, $P_{,,}$, $P_{,,,}$ u. s. w. die effektiven Wege $\sigma_{,}$, $\sigma_{,,}$, $\sigma_{,,,}$ u. s. w. Diese auf die Kraftlinien projecirt, geben die Wege der Kräfte:

$$s_{,}, \; s_{,,}, \; s_{,,,} \text{ u. s. w.};$$

die bei der Verschiebung geleistete Arbeit ist daher auch:

$$L = \text{Null} = P_{,} s_{,} + P_{,,} s_{,,} + P_{,,,} s_{,,,} + \cdots,$$

d. h.:

Bei einer kleinen willkürlichen Verschiebung eines im Gleichgewichtszustande befindlichen Kräftekomplexes ist die Arbeit aller Kräfte zusammen = Null.

31. Wenn eine Kraft P einem Körper die Beschleunigung = p ertheilt, so ist:

$$\frac{P}{p} = M$$

diejenige Kraft, welche demselben Körper eine Beschleunigung:

= Eins

ertheilen würde.

Man hat diese Kraft M mit dem Namen:

„Masse“

bezeichnet und hat auch, wenn G das Gewicht des Körpers und g = 9,8088 Meter die Beschleunigung der Schwerkraft bedeutet:

$$M = \frac{G}{g}.$$

32. Ein mit einer gewissen Geschwindigkeit v_0 geradlinig sich bewegender Körper besitzt ein gewisses Arbeitsvermögen.

Vermindert sich v_0, so verliert er an Arbeitsvermögen, vergrössert sich v_0, so gewinnt er daran.

Im ersten Falle gibt er Arbeit aus — er verrichtet Arbeit — im zweiten Falle nimmt er Arbeit auf — es wird an ihm Arbeit verrichtet.

Bedeutet c die Anfangsgeschwindigkeit, v die Endgeschwindigkeit, so ist diese Arbeitsaufnahme oder Arbeits-

ausgabe während der Geschwindigkeitsveränderung von c in v:

$$L = \frac{M}{2}(v^2 - c^2).$$

Das Produkt:

$$\frac{M}{2} v^2$$

nennt man die lebendige Kraft des bewegten Körpers.

33. Bei einem mit der Winkelgeschwindigkeit w sich um eine Axe drehenden Körper legen die einzelnen Massentheile m_1, m_2, $m_3 \cdots$ die Wege $w z_1$, $w z_2$, $w z_3 \cdots$ zurück, wenn z_1, z_2, z_3 die Axenabstände von m_1, m_2, m_3 bezeichnet.

Die lebendige Kraft der einzelnen Massentheile ist daher:

$$\frac{m_1}{2}(w z_1)^2; \quad \frac{m_2}{2}(w z_2)^2$$

u. s. w. Durch Summation ergibt sich die lebendige Kraft des ganzen rotirenden Körpers:

$$L = \frac{w^2}{2}(m_1 z_1^2 + m_2 z_2^2 + m_3 z_3^2 + \cdots).$$

Die Klammergrösse nennt man das Trägheitsmoment des rotirenden Körpers und bezeichnet es gewöhnlich mit T.

Für eine Stange 2 a lang, drehend um eine durch den Schwerpunkt gehende Axe, ist:

$$T = {}^1/_3\, M a^2.$$

Für einen Kreis, um den Durchmesser 2 r rotirend, ist:

$$T = {}^1/_4\, M r^2.$$

Für einen Kreis, der sich in seiner Ebene um den Mittelpunkt dreht, ist:

$$T = {}^1/_2\, M r^2.$$

Für eine Kugel, um den Durchmesser rotirend, ist:

$$T = {}^2/_5\, M\, r^2.$$

Für einen Cylinder:

$$T = {}^1/_2\, M\, r^2.$$

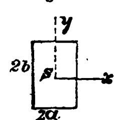
Für einen Kegel:

$$T = {}^3/_{10}\, M\, r^2.$$

Für einen abgekürzten Kegel:

$$T = {}^3/_{10}\, M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}.$$

Figur 18.



Für ein Rechteck drehend:

um x; $T = {}^1/_3\, M\, b^2$,

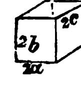
um y; $T = {}^1/_3\, M\, a^2$,

um s; $T = M \frac{a^2 + b^2}{3}$.

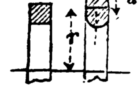
Für ein Parallelepipedon, drehend eine Schweraxe ‖ zu den Kanten 2 b:

Figur 19.

$$T = M \frac{a^2 + c^2}{3}.$$



Für einen Ring, drehend um eine zu seiner Ebene normale Axe, bei:



quadratischen Profil $T = M\left(r^2 + \frac{b^2}{4}\right)$,

elliptischen „ $T = M\,(r^2 + {}^3/_4\, a^2)$.

Für einen Kugelabschnitt von der Höhe h, der sich um den Kugeldurchmesser 2 r dreht:

$$T = {}^2/_3\, M\, h \left(r - {}^5/_{12}\, h + {}^1/_{90} \frac{h^2}{r - {}^1/_3\, h}\right).$$

34. Die Centrifugalkraft tritt auf, wenn ein Körper eine bogenförmige Bahn durchläuft. Sie äussert sich in dem Bestreben des Ersteren, sich von dem Mittelpunkte, aus dem die bogenförmige Bahn beschrieben ist, zu entfernen.

Bedeutet:

G das Gewicht des Körpers,
g die Beschleunigung der Schwerkraft,
M die Masse des Körpers,
r den Krümmungshalbmesser der Bahn,
v die Geschwindigkeit des Körpers,
P die Centrifugalkraft,

so ist:

$$P = \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{r} = M \frac{v^2}{2} = 0{,}102 \frac{v^2 G}{2}$$

Kilogramm.

35. Man unterscheidet beim Stosse:

a. den centrischen Stoss,
b. den excentrischen Stoss,
c. den vollkommen unelastischen,
d. den vollkommen elastischen,
e. den unvollkommen elastischen Stoss.

Der excentrische Stoss lässt sich durch Kräftezerlegung auf den centrischen zurückführen. Letzterer findet statt, wenn die im Stosspunkte auf der gemeinschaftlichen Berührungsebene errichtete Normale parallel mit der Bewegungsrichtung der Schwerpunkte beider Körper ist und durch beide Schwerpunkte geht. Nach vollendetem Stosse ändern die Körper ihre bisherige Geschwindigkeit.

Beim Stosse vollkommen unelastischer Körper findet ausserdem ein Arbeitsverlust statt.

Bezeichnet:

M_1 und M_2 die Masse der Körper,
V_1 und V_2 ihre gleichgerichteten Geschwindigkeiten vor dem Stosse,
c_1 und c_2 dieselben nach dem Stosse,

so ist:

Beim vollkommen unelastischen Stosse:

$$c_1 = c_2 = \frac{M_1 V_1 + M_2 V_2}{M_1 + M_2}$$

und der Arbeitsverlust:

$$^1/_2 \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot (V_1 - V_2)^2.$$

Beim vollkommen elastischen Stosse:

$$c_1 = \frac{(M_1 - M_2) V_1 + 2 M_2 V_2}{M_1 + M_2},$$

$$c_2 = \frac{(M_2 - M_1) V_2 + 2 M_1 V_1}{M_1 + M_2},$$

Für $V_2 = 0$ ist hiernach:

$$c_1 = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \cdot V_1,$$

$$c_2 = \frac{2 M_1}{M_1 + M_2} \cdot V_1.$$

Für $M_1 = M_2$ ist:

$$c_1 = V_2,$$

$$c_2 = V_1.$$

Beim unvollkommen elastischen Stosse:

$$c_1 = \frac{M_1 V_1 + M_2 V_2 - M_2 (V_1 - V_2) \sqrt{\frac{h}{h_1}}}{M_1 + M_2},$$

$$c_2 = \frac{M_1 V_1 + M_2 V_2 + M_1 (V_1 - V_2) \sqrt{\frac{h}{h_1}}}{M_1 + M_2}.$$

Hierin ist h_1 die Höhe, auf welche der Körper zurückprallen würde, wenn es aus der Höhe h herabfallen würde.

Für Elfenbein ist:

$$\sqrt{\frac{h}{h_1}} = {}^8/_9.$$

Für Stahl und Kork:

$$\sqrt{\frac{h}{h_1}} = {}^5/_9.$$

36. Die Reibung ist unabhängig von der Grösse der Berührungsflächen — abhängig dagegen von der Rauheit derselben und dem Normaldrucke.

Unter Letzterem versteht man den Druck lothrecht zur Berührungsfläche, durch den die reibenden Flächen an einander gepresst werden.

Um die Rauheit der Oberflächen zu mildern, wendet man Schmiermittel an.

Man unterscheidet:

1. die gleitende Reibung,
2. die Zapfenreibung,
3. die rollende Reibung,
4. die Seil- oder Kettenreibung.

37. Bedeutet f den Koëffizienten der gleitenden Reibung, N den Normaldruck und R die Betriebskraft zur Ueberwindung dieser Reibung, so ist:

$$R = f\,N.$$

Gleitet ein Körper auf einer um α Grad geneigten Bahn herab, so ist:

$$N = G \cos. \alpha,$$

wenn G das Gewicht des Körpers bedeutet und daher:

$$R = f\,G \cos. \alpha.$$

Bei einem gewissen Neigungswinkel der Bahn hält die Reibung der Körper auf derselben fest. Dieser Winkel heisst der Reibungs- oder Ruhewinkel. Bezeichnet man ihn mit ϱ, so ist:

$$\text{tang.}\, \varrho = \text{f}.$$

Für eine horizontale Bahn ist $\alpha = 0$, daher cos. $\alpha = 1$ und:

$$\text{R} = \text{f G}.$$

Die nachfolgende Tabelle gibt die Werthe von f an.

Koëffizienten für die gleitende Reibung.

Reibende Körper.	Lage der Fasern.	Zustand der Oberflächen.	Reibungskoëffizient f der Ruhe.	der Bewegung.
Gusseisen				
auf Gusseisen oder Bronze	...	wenig fettig	0,16	0,15
	...	mit Wasser	..	0,31
= auf Eiche	parallel	trocken	..	0,49
	„	trockene Seife	..	0,19
Schmiedeeisen				
auf Schmiedeeisen	...	trocken	..	0,44
= auf Gusseisen oder Bronze	...	trocken	0,19	0,18
= auf Eiche	parallel	mit Wasser	0,65	0,26
	„	mit Talg	0,11	0,08
Bronze auf Bronze ..	...	trocken	..	0,20
= auf Gusseisen ...	...	trocken	..	0,21
= auf Schmiedeeisen	...	etwas fettig	..	0,16
Messing auf Eiche ..	parallel	trocken	0,62	..
Eiche auf Eiche	„	trocken	0,62	0,48
	„	trockene Seife	0,44	0,16
	gekreuzt	trocken	0,54	0,34
	„	mit Wasser	0,71	0,25
Eichenhirnholz auf Eiche	parallel	trocken	0,43	0,19

38. Bedeutet N den Normaldruck eines horizontal liegenden Zapfens gegen seine Lagerschale, f den Koëffizienten der Zapfenreibung, r den Zapfenhalbmesser, so ist das Moment zur Ueberwindung der Zapfenreibung:

$$M p = f N r$$

und die hierzu nöthige Kraft p an einem Hebelarm $= r_1$ wirkend:

$$p = f N \frac{r}{r_1}.$$

Der Normaldruck N ist = die Mittelkraft aus sämmtlichen auf den Zapfen wirkenden Kräften, p mit eingeschlossen.

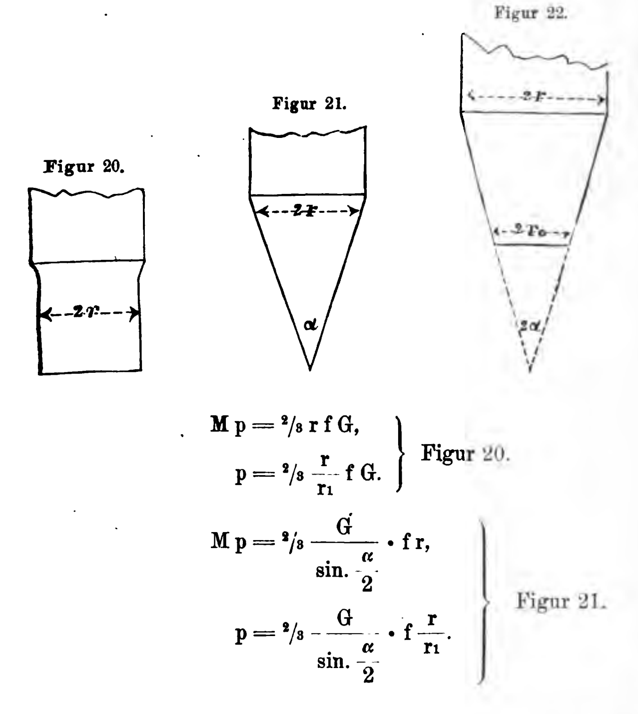
Die nachfolgende Tabelle gibt die Werthe von f an.

Koëffizienten für die Zapfenreibung.

Reibende Körper.	Zustand der Oberflächen.	Reibungskoëffizient, wenn die Schmiere erneuert wird: auf gew. Art.	ununterbrochen.
Gusseisen auf Gusseisen	geschmiert	0,08	0,054
	fettig	0,14	. .
= auf Bronze	geschmiert	0,08	0,054
	fettig	0,16	. .
= auf Pockholz	geschmiert	. .	0,09
	fettig	0,10	. .
Schmiedeeisen auf Gusseisen	geschmiert	0,08	0,054
= auf Bronze	geschmiert	0,08	0,054
	wenig fettig	0,25	. .
= auf Pockholz	geschmiert	0,11	. .
	fettig	0,19	. .

39. Die Spurzapfenreibung ist eine Art gleitender Reibung.

Bezeichnet M p das zu ihrer Ueberwindung nöthige Kraftmoment, p die Kraft selbst und r_1 ihren Hebelarm, sowie G das Gewicht der stehenden Welle nebst Belastung, so hat man für die nachfolgenden Zapfenformen:



Figur 20. Figur 21. Figur 22.

$$\left.\begin{aligned} M\,p &= {}^2/_3\, r\, f\, G, \\ p &= {}^2/_3\, \frac{r}{r_1}\, f\, G. \end{aligned}\right\} \text{Figur 20.}$$

$$\left.\begin{aligned} M\,p &= {}^2/_3\, \frac{G}{\sin.\frac{\alpha}{2}} \cdot f\, r, \\ p &= {}^2/_3\, \frac{G}{\sin.\frac{\alpha}{2}} \cdot f\, \frac{r}{r_1}. \end{aligned}\right\} \text{Figur 21.}$$

$$\left.\begin{aligned} M\,p &= {}^2/_3\,\frac{G\,f}{r^2}\left(\frac{r^3 - r\,r_0^2}{\sin.\,\alpha} + r_0^3\right) \\ p &= {}^2/_3\,\frac{G\,f}{r^2\,r'}\left(\frac{r^2 - r\,r_0^2}{\sin.\,\alpha} + r_0^3\right) \end{aligned}\right\}\ \text{Figur 22.}$$

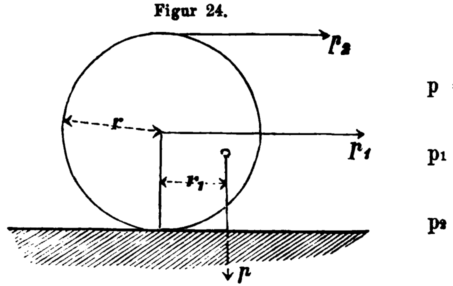
Figur 23.

2 r

$$\left.\begin{aligned} M\,p &= f\,\frac{\pi}{2}\,G\,r, \\ p &= f\,\frac{\pi}{2}\,G\,\frac{r}{r_1}. \end{aligned}\right\}\ \text{Figur 23.}$$

40. Bei der wälzenden oder rollenden Reibung greift die zur Ueberwindung nöthige Kraft, entweder in einem beliebigen Punkte wie p, oder sie greift wie p_1 im Mittelpunkte der rollenden Walze oder an deren Umfang, wie p_2, an. Bezeichnet N den Normaldruck, f den Koëffizienten der rollenden Reibung, so ist:

Figur 24.



$$p = f\,\frac{N}{r},$$

$$p_1 = f\,\frac{N}{r},$$

$$p_2 = f\,\frac{N}{2\,r}.$$

Für Pockholz auf Eichen ist . . . . . . f = 0,047,
„ Ulme auf Eichen ist . . . . f = 0,081,
„ Gusseisen auf Gusseisen ist . . . . f = 0,047,
„ Gusseisen auf Eisenschienen . . . . f = 0,052.

Für Fuhrwerke gilt die nachfolgende Tabelle.

Koëffizienten für die Reibungswiderstände der Bewegung für Fuhrwerke.

Das Verhältniss des horizontalen Zuges auf horizontaler Bahn zur Last beträgt ca.:

auf schlechten Wegen, in lockerm Sande oder auf einer lockern 4—5 Zoll (100—130 Millim.) hohen Kiesschicht	$^1/_{10}$ bis $^1/_5$
auf kothiger, aufgerissener Chaussee . .	$^1/_{20}$ „ $^1/_{12}$
auf guter Chaussee	$^1/_{50}$ „ $^1/_{30}$
auf gewöhnlichem Pflaster	$^1/_{40}$ „ $^1/_{50}$
auf sehr gutem Pflaster	$^1/_{50}$ „ $^1/_{60}$
auf Eisenbahnen bei mässiger Fahrgeschwindigkeit ca.	$^1/_{200}$
bei grosser Fahrgeschwindigkeit ca.	$^1/_{100}$

Die vorstehenden Angaben setzen einen mittleren Raddurchmesser von 4 Fuss (1,25 Meter) und eine Reifenbreite von 4—4$^1/_2$ Zoll (100—120 Millim.) voraus.

Der Widerstand von Fuhrwerken ist nahezu dem Raddurchmesser umgekehrt proportional.

Auf Wegen mit einer Steigung $\frac{1}{n}$ nimmt die Zugkraft um $\frac{1}{n}$ der Last zu oder ab.

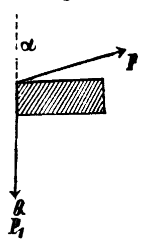
41. Die Seilreibung tritt auf, wenn ein Seil eine gewisse Last Q trägt und ganz oder theilweise um einen walzenförmigen Körper geschlungen ist.

Durch die Seilreibung wird die zum Heraufziehen der Last Q erforderliche Kraft vergrössert und andererseits die Kraft, mit der Q hinabgleitet, vermindert.

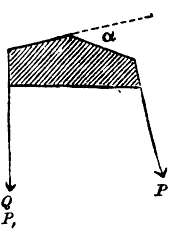
Bezeichnet f den Reibungskoëffizienten, P die Kraft zum Heraufziehen, P_1 die des Herabgleiten, so ist für die nachstehenden Fälle:

$$P = Q\left(1 + 2\,f\,\sin.\frac{\alpha}{2}\right), \quad P_1 = Q\left(1 - 2\,f\,\sin.\frac{\alpha}{2}\right). \qquad \text{Figur 25.}$$

Figur 25.



Figur 26.



Für ein Polygon mit dem Kantenwinkel α, wenn das Seil n Seiten desselben deckt:

$$P = \left(1 + 2\,f\,\sin.\frac{\alpha}{2}\right)^n Q, \quad P_1 = \left(1 - 2\,f\,\sin.\frac{\alpha}{2}\right)^n Q. \qquad \text{Figur 26.}$$

Figur 27.



Für eine Walze, die auf eine Bogenlänge = A von dem Seile gedeckt ist:

$$P = 2{,}71828^{fA}\,Q,$$

$$Q = 2{,}71828^{-fA}\,P.$$

Für Hanfseile und Holzzylinder kann man $f = {}^1/_3$ annehmen und hat daher bei einer Deckung des Seiles von:

$^1/_4$ des Walzenumfanges . .	$P = 1{,}69\ Q$,
$^1/_2$ „ „ . .	$P = 2{,}85\ Q$,
Bei einem vollen Umschlag .	$P = 8{,}12\ Q$,
„ zwei vollen Umschlägen .	$P = 65{,}94\ Q$,
„ vier „ „ .	$P = 4348{,}56\ Q$.

Die vorigen Formeln gelten auch für Ketten, die aus Ringen konstruirt sind, und für Gliederketten, sofern man den Winkel α aus der Gliedlänge l und dem Walzenhalbmesser r bestimmt.

Es ist hier:

$$l = 2\,r\,\sin.\,\frac{\alpha}{2}$$

und daher:

$$\sin.\,\frac{\alpha}{2} = \frac{l}{2\,r}.$$

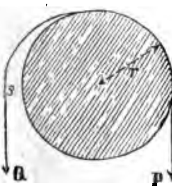
Daher wenn n die Anzahl der aufliegenden Kettenglieder bezeichnet:

$$P = \left(1 + \frac{f\,l}{r}\right)^n Q,$$

$$P_1 = \left(1 - \frac{f\,l}{r}\right)^n Q.$$



Figur 28.



43. Die Steifigkeit der Seile und Ketten äussert sich dadurch, dass sich am Lastende das Seil nicht flach auf die Rolle auflegt, sondern um ein Stück ϱ davon absteht.

Hierdurch wird der Hebelarm der Last und daher ihr Moment vergrössert.

Die Kraft zur Ueberwindung der Seilsteifigkeit ist:

$$P = \frac{r + \varrho}{r}\,Q.$$

Für ein Seil vom Durchmesser d ist:

$$\varrho = \frac{d^2}{2}.$$

Für eine sich zugleich auf- und abwickelnde Kette ist:

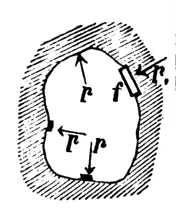
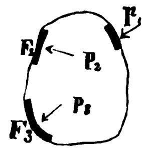
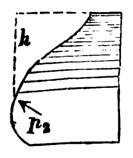
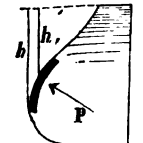
$$\varrho = f\,\delta.$$

Für eine sich blos abwickelnde Kette:

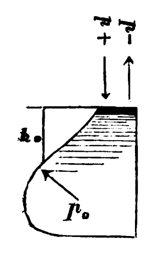
$$\varrho = f\,\frac{\delta}{2},$$

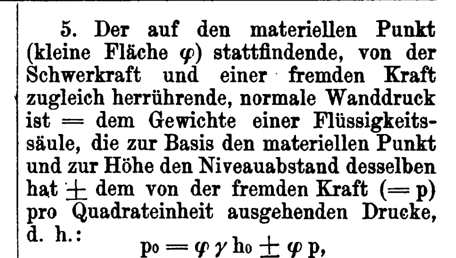
worin δ den Durchmesser der Kettenbolzen und f den Koëffizienten der Zapfenreibung bezeichnet.

Hydraulik.

Figur.	**Lehrsatz.**
	1. Bei eingeschlossenen flüssigen Massen ist, wenn das Eigengewicht der Masse unberücksichtigt bleibt, der normale Wanddruck pro Quadrateinheit eben so gross und von gleicher Art, wie derjenige Druck p_{1}, welcher auf die Quadrateinheit der Angriffsfläche f ausgeübt wurde. $$p = p_{,}.$$
	2. Der normale Wanddruck auf ganze Flächen F_2 und F_3 verhält sich, wie der Quadratinhalt der Flächen selbst: $$P_2 : P_3 = F_2 : F_3.$$
	3. Der normale Wanddruck einer flüssigen Masse unter alleiniger Einwirkung ihres Eigengewichtes, auf einem materiellen Punkte (kleine Fläche φ), ist gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, die zur Basis den materiellen Punkt, und zur Höhe den Niveauabstand desselben hat: $$p_2 = \varphi\, h \cdot \gamma.$$
	4. Der Druck auf eine ganze beliebig geformte und beliebig liegende Fläche ist dabei: $$P = \gamma\,(\varphi\, h + \varphi_{,}\, h_{,} \cdot \cdot \cdot),$$ $$= \gamma\, \Sigma\, \varphi\, h.$$

Figur.	Lehrsatz.

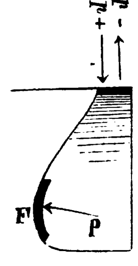




5. Der auf den materiellen Punkt (kleine Fläche φ) stattfindende, von der Schwerkraft und einer fremden Kraft zugleich herrührende, normale Wanddruck ist = dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, die zur Basis den materiellen Punkt und zur Höhe den Niveauabstand desselben hat $\pm$ dem von der fremden Kraft (= p) pro Quadrateinheit ausgehenden Drucke, d. h.:

$$p_0 = \varphi \gamma h_0 \pm \varphi p,$$

wobei das obere Zeichen giltig ist, wenn p drückend, und das untere, wenn p ziehend wirkt.



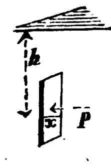
6. Der normale Wanddruck P auf eine beliebig geformte und beliebig liegende Wandfläche F ist:

$$P = \Sigma \varphi \gamma h_0 \pm F p.$$

Für eine ebene Fläche ist:

$$P = F h \gamma \pm F p,$$

worin h den Niveauabstand des Schwerpunktes bedeutet.



7. Der normale Wanddruck einer flüssigen Masse gegen eine ebene vertikale Fläche F, ist = ihrem Horizontaldrucke und = dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, welche zur Basis die Fläche F, und zur Höhe den Niveauabstand h des Flächenschwerpunktes hat $\pm$ dem von einer äusser-

Figur.	Lehrsatz.

lichen Kraft etwa herrührenden, auf $F_{,}$ lastenden Drucke, oder:

$$P_{,} = F_{,} h \gamma \pm F_{,} p.$$

Für $p = 0$ ist der Normaldruck:

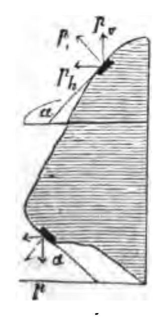
$$P_{,} = F_{,} h \gamma.$$

8. Der Mittelpunkt des Druckes, d. h. der Angriffspunkt von P, liegt tiefer als der Schwerpunkt. Sein Niveauabstand ist:

$$s = \frac{\gamma \text{ Trägheits-M. v. } F_{,} \pm p \text{ Stat.-M. v. } F_{,}}{\gamma \text{ Stat.-M. von } F_{,} \pm p \cdot F_{,}}.$$

Für $p = 0$ ist der Niveauabstand des Mittelpunktes des Druckes:

$$s = \frac{\text{Trägheits-Mom. von } F_{,}}{\text{Stat.-Mom. von } F_{,}}.$$



9. Der normale Wanddruck auf den materiellen Punkt (kleine Fläche φ) zerlegt sich in einen Horizontaldruck:

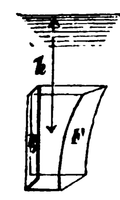
$$p_h = \varphi \gamma h_0 \sin. \alpha \pm \varphi p \sin. \alpha$$

und in einen Vertikaldruck:

$$p_v = \varphi \gamma h_0 \cos. \alpha \pm \varphi p \cos. \alpha,$$

worin h_0 den Niveauabstand des materiellen Punktes und α den Neigungs ∢ seiner kleinen Fläche φ gegen den Horizont bedeutet. Der Vertikaldruck p_v kann sowohl abwärts, wie aufwärts gerichtet sein. Im letzten Falle heisst er Auftrieb.

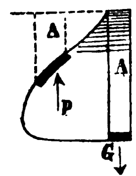
Figur.	Lehrsatz.



10. Der Horizontaldruck $P_{,}$ auf einer beliebig geformten und beliebig liegenden Wandfläche F in irgend einer Richtung xx ist = dem Drucke auf ihrer Vertikalprojektion $F_{,}$ in Richtung xx.

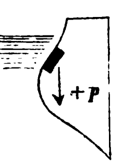
Bedeutet h den Niveauabstand des Schwerpunktes von F, und p den etwa vorhandenen von fremden Kräften herrührenden Druck pro □ Einheit, so ist

$$P_{,} = F_{,} h \gamma \pm p F_{,}.$$

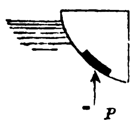


11. Der Vertikaldruck einer flüssigen Masse auf eine beliebig geformte und beliebig liegende Wandfläche ist gleich dem Gewichte einer darüber stehenden, bis ins Niveau reichenden Flüssigkeitssäule ± dem auf der Wandfläche etwa lastenden fremden Drucke oder

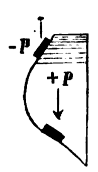
$$P = \gamma \cdot \text{Körper A}.$$



Bei den nach dem Innern der Flüssigkeit geneigten Wandflächen geht der Vertikaldruck von unten nach oben, und ist hier Auftrieb = — P. Bei den auswärts geneigten Flächen geht P abwärts und ist hier Niederdruck = + P.



Figur.	Lehrsatz.

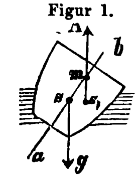


12. Bei einer mehrfach gekrümmten Fläche ist der resultirende Vertikaldruck entweder + P oder — P, d. h. entweder Niederdruck oder Auftrieb.

13. Der Auftrieb gegen einen schwimmenden Körper ist = dem Gewichte des durch den Körper verdrängten Wassers.

14. Der Auftrieb hat seinen Angriffspunkt im Schwerpunkte der verdrängten Wassermasse.

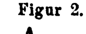
Figur 1.

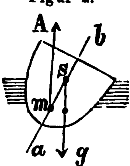


15. Wird ein schwimmender Körper aus der Gleichgewichtslage gebracht, so wird die Axe a b von dem Eigengewicht g des Körpers und von dem Auftriebe A in 2 verschiedenen Punkten s und m ergriffen. Beide Kräfte bilden einen Drehzwilling (Kräftepaar) und drehen daher die in eine schiefe Lage gebrachte Axe a b weiter.

Liegt m, das sogen. Metacentrum, über dem Schwerpunkt s, so erfolgt die Drehung in der Figur 1 von **rechts** nach links und der Körper kommt wieder in die Gleichgewichtslage.

Er schwimmt mit Stabilität und es wird dieselbe um so grösser — je grösser der Abstand s m des Metacentrums vom Schwerpunkte ist.


Figur 2.



Fällt das Metacentrum m Fig. 2 unter den Schwerpunkt s, so dreht das Kräftepaar A g die Axe a b nach links und der schwimmende Körper kantet um.

Lehrsatz.

16. Ist G das Gewicht eines unter Wasser getauchten Körpers, P der Auftrieb, γ das Eigengewicht des Wassers $\gamma_{\prime}$, jenes des Körpers, so ist

$$\frac{\gamma_{\prime}}{\gamma} = \frac{G}{P},$$

und das specifische Gewicht des Körpers

$$E = \frac{\text{absolutes Gewicht}}{\text{Gewichtsverlust im Wasser}}.$$

17. In kommunicirenden Röhren verhalten sich die Höhen verschiedener Flüssigkeiten umgekehrt wie die specifischen Gewichte.

18. Zur Bestimmung der Wanddicke von Röhren dient die folgende Tabelle. Darin bedeutet
δ die Wanddicke,
d den inneren Durchmesser,
n den Wanddruck in Atmosphären.

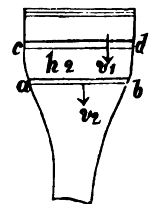
Material.	Rohrstärke δ in Centimetern.
Eisenblech	$\delta = 0{,}00086\,nd + 0{,}30.$
Gusseisen	$\delta = 0{,}00238\,nd + 0{,}85.$
Kupfer	$\delta = 0{,}00148\,nd + 0{,}40.$
Blei	$\delta = 0{,}00242\,nd + 0{,}50.$
Zink	$\delta = 0{,}00507\,nd + 0{,}40.$
Holz	$\delta = 0{,}03230\,nd + 2{,}70.$
natürliche Steine	$\delta = 0{,}03690\,nd + 3{,}00.$
künstliche Steine	$\delta = 0{,}05380\,nd + 4{,}00.$

Wasser und Gasleitungsröhren wurde mit 10 Atmosphären Druck geprüft, und hat man daher hier n = 10 zu setzen.

Figur.	Lehrsatz.

19. Lastet auf einer Flüssigkeit ein fremder nicht von ihrem Eigengewicht herrührender Druck p pro □ Einheit, und ist γ das Eigengewicht der Flüssigkeit, so ist $\frac{p}{\gamma}$ die hydrostatische Druckhöhe von p, d. h. der Druck p kann durch eine Flüssigkeitssäule von der Höhe $\frac{p}{\gamma}$ ersetzt werden.

20. Der Wanddruck des fliessenden Wassers ist kleiner als der des stillstehenden. Man nennt den Letztern den hydrostatischen, den Erstern den hydraulischen Druck.



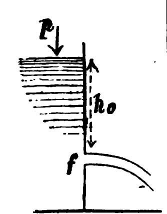
21. Bezeichnet h_2 den Höhen-Abstand zweier Profile a b und c d; $v_{,}$ die Geschwindigkeit im Profil c d; v_2 jene im Profil a b, und p den Druck pro □ Einheit über Profil c d, so ist die hydraulische Druckhöhe in dem Punkt a und b.

$$= \frac{p}{\gamma} + h_2 - \left(\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_{,}^2}{2g}\right)$$

Man nennt $\frac{v_2^2}{2g}$ und $\frac{v_{,}^2}{2g}$ die Geschwindigkeitshöhen zu den Geschwindigkeiten v_2 und $v_{,}$, und kann daher behaupten, dass die hydraulische Druckhöhe von irgend einer Stelle der Wandung gleich

Figur.	Lehrsatz.

ist der hydrostatischen Druckhöhe $\frac{p}{\gamma} + h_2$, vermindert um die Differenz der Geschwindigkeitshöhen das Wasser an dieser und an der Eintrittsstelle.



22. Beim Ausfluss des Wassers treten verschiedene Bewegungshindernisse, wie Reibung, Kontraktion etc. ein. Man nennt die Ausflussgeschwindigkeit, welche ohne jene Hindernisse vorhanden sein müsste, die theoretische Ausflussgeschwindigkeit im Gegensatze zur wahren. Bezeichnet h_0 den Niveauabstand einer kleinen Ausflussöffnung, p den von äusserlichen Kräften etwa herrührenden Druck pro □ Einheit, c die Geschwindigkeit des zufliessenden Wassers, so ist die theoretische Ausflussgeschwindigkeit:

$$v_t = \sqrt{2 g \left(h_0 + \frac{c^2}{2 g} \pm \frac{p}{\gamma}\right)}.$$

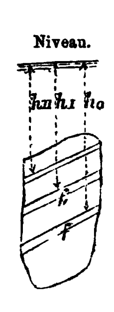
Für p und e = o ist

$$v_e = \sqrt{2 g h_0},$$

d. h. die Ausflussgeschwindigkeit v_t ist ebenso gross, als wenn das Wasser aus der Höhe h_0 herabgefallen wäre. Diese Höhe, die also die Geschwindigkeit v_t erzeugt, nennt man die Geschwindigkeitshöhe zu v^t (vgl. 18) und es ist:

$$h_0 = \frac{v_t^{\,2}}{2 g}$$

Figur.	Lehrsatz.



23. Die theoretische Ausflussmenge für eine Oeffnung von der Grösse des materiellen Punktes (kleine Fläche φ) ist

$$W = \varphi \, v_t \text{ pro Sek.}$$

Dieselbe ist für einen horizontalen, unendlich schmalen Streifen vom Flächen-Inhalt f

$$W = f \, v_t = f \sqrt{2 g h_0}.$$

Für eine ganze aus den Streifen $f_, f_{,,} f_{,,,} \cdots$ bestehende grössere Oeffnung ist:

$$W = \Sigma f v,$$
$$= f_, v_, + f_{,,} v_{,,} + f_{,,,} v_{,,,} \cdots$$
$$= \sqrt{2 g} \, (f_, h_,^{1/2} + f_{,,} h_{,,}^{1/2} \cdots),$$

wonach die Berechnung der theoretischen Ausflussmenge für beliebig geformte Mündungen erfolgen kann.

24. Aus der theoretischen Ausflussmenge, die für verschiedene Oeffnungen in Tabelle 1 berechnet ist, ergibt sich die wahre Ausflussmenge $\mathfrak{W}$ durch Multiplikation mit gewissen Erfahrungszahlen k, die man Ausflusskoëffizienten nennt, und die in Tabelle 2 zusammengestellt sind.

Es ist immer

$$\mathfrak{W} = k W$$

und die mittle wahre Ausflussgeschwindigkeit durch eine Oeffnung vom Querschnitt F:

$$v = \frac{\mathfrak{W}}{F}.$$

Bedeutet t die mittle Tiefe, also

$$t = \frac{\text{Profilfläche}}{\text{benetzten Umfang}} = \frac{F}{h},$$

α das relative Gefälle pro Längeneinheit,

v die mittle Geschwindigkeit in einem Profil, so ist nach Brahm

$$v = 90{,}9 \sqrt{\alpha\, t},$$

nach Edelwein

$$v = -0{,}1057 + \sqrt{0{,}01118 + 8715{,}6\, \alpha\, t},$$

nach Prony

$$v = -0{,}2230 + \sqrt{0{,}0508 + 10301\, \alpha\, t},$$

und die Wassermenge des Stroms oder des Kanals

$$\mathfrak{W} = F \cdot v.$$

Aus den Messungen von Humphrey & Abbot am Mississippi hat man neuerdings folgende Formen abgeleitet.

Es bedeutet darin:

a den Flächeninhalt des Wasserprofils,

p den benetzten Umfang,

$J = \frac{h}{l}$ das Gefälle pro Längeneinheit,

W die Breite des Wasserspiegels,

$R_{,} = \frac{a}{p + W}$ und $R = \frac{a}{p}$,

n den Rauhheitskoëffizienten, die Längen in Metermass gemessen.

1) Formel von Humphrey & Abbot, abgekürzt durch Grebenau:

$$v = 8{,}32 \sqrt{R}, \sqrt[4]{J}.$$

2) Formel von Bazin:

$$v = \sqrt{\frac{R\,J}{\alpha + \frac{\beta}{R}}}.$$

Darin ist

	α	β
1. für glatte Wände	0,0015	0,0000045,
2. für rauhe Wände	0,00019	0,0000133,
3. für Bruchsteinwände	0,00024	0,0000600,
4. für Erdwände	0,00028	0,0003500.

3) Formel von Gaukler:

a. wenn $J > 0{,}0007$

$$\sqrt{v} = \alpha \sqrt[3]{R} \sqrt[4]{J},$$

b. wenn $J < 0{,}0007$

$$\sqrt[4]{v} = \beta \sqrt[3]{R} \sqrt[4]{J}.$$

Darin ist bei Kanälen für Wände

	α	β
1. aus Quadern	8,5 bis 10,0	8,5 bis 9,0,
2. gewöhnlichem Mauerwerk	7,6 „ 8,5	8,0 „ 8,5,
3. gewöhnlicher Sohle, Erde	6,8 „ 7,6	7,7 „ 8,0,
4. alles Erde ohne Pflanzen	5,7 „ 6,7	7,0 „ 7,7,
5. desgl. mit Pflanzen . . .	5,0 „ 5,7	6,6 „ 7,0,
6. für Flüsse	5,0 „ 5,7	6,4 „ 7,0.

4) Formel von Hagen:

$$v = 2{,}425 \sqrt{R} \sqrt[6]{J}.$$

5) Formel von Ganguillets & Kutter:

$$v = \left(\frac{Z}{1 + \frac{x}{\sqrt{R}}}\right) \sqrt{RJ}.$$

Darin ist

$$Z = a + \frac{l}{n} + \frac{m}{J}.$$

$$x = \left(a + \frac{m}{J}\right) n,$$

$a = 23$ $m = 0{,}00155,$

$l = 1{,}00$ $n = 0{,}008$ bis $0{,}04,$
je nach dem Grade der Rauheit des benetzten Umfanges.

Tafel I der theoretischen Wassermenge bei Bodendeckel und Seitenöffnungen.

Es bedeutet:

g die Beschleunigung der Schwerkraft und ist, wenn nach Metermaass gerechnet wird,

$$g = 9{,}8088,$$

wenn nach preuss. Fussmaass

$$g = 31{,}2528;$$

F den □ Inhalt der Oeffnung;

○ den Schwerpunkt derselben;

W die ausfliessende theoretische Wassermenge pro Sekunde.

Die mittle Ausflussgeschwindigkeit ist stets $= \frac{W}{F}$.

Form der Oeffnung.	Theoretische Wassermenge W, Ausfluss in die freie Luft.
	$W_{\sqcup} = {}^{2}/_{3}\, b\, h \sqrt{2\, g\, h}$ $= {}^{2}/_{3}\, b\, h^{3/2} \sqrt{2\, g}.$
	$W_{\angle\!/} = {}^{2}/_{3}\, b\, h \sqrt{2\, g\, h}$ $= {}^{2}/_{3}\, b\, h^{3/2} \sqrt{2\, g}.$
	$W_{\vee} = {}^{4}/_{15}\, b\, h \sqrt{2\, g\, h}$ $= {}^{4}/_{15}\, b\, h^{3/2} \sqrt{2\, g}.$
	$W_{\nabla} = {}^{2}/_{15}\, (2\, B + 3\, b)\, h \sqrt{2\, g\, h}$ $= {}^{2}/_{15}\, (2\, B + 3\, b)\, h^{3/2} \sqrt{2\, g}.$

Form der Oeffnung.	Theoretische Wassermenge W, Ausfluss in die freie Luft.
	$W_{\smile} = \sqrt{2\,g\,r^5}$ $= r^{5/2}\sqrt{2\,g}.$
	$W_{\square} = {}^2/_3\, b \sqrt{2\,g}\,(\sqrt{h^3} - \sqrt{h_,^3})$ $= {}^2/_3\, b\,(h^{3/2} - h_,^{3/2})\sqrt{2\,g}.$
	$W_{\angle} = {}^2/_3\, b \sqrt{2\,g}\,(\sqrt{h^3} - \sqrt{h_,^3})$ $= {}^2/_3\, b\,(h^{3/2} - h_,^{3/2})\sqrt{2\,g}.$
	$W_{\triangledown} =$ $2\,b_, \sqrt{2\,g} \cdot \frac{2\,h^{5/2} - 5\,h\,h_,^{3/2} + 3\,h_,^{5/2}}{15\,(h - h_,)}.$

Form der Oeffnung.	Theoretische Wassermenge W, Ausfluss in die freie Luft.
	$W_\triangle = 2\,b_,\sqrt{2\,g} \cdot \frac{3\,h^{5/2} - 5\,h_,\,h^{3/2} + 2\,h_,^{5/2}}{15\,(h - h_,)}$.
	$W = W_\bigtriangledown + W_\square$.
	$W = W_\triangle + W_\square + W_\bigtriangledown$.
	$W_\circ = r^2\pi\sqrt{2\,g\,h}\,(1 - \frac{r^2}{32\,h^2})$, annähernd $= r^2\,\pi\sqrt{2\,g\,h}$.

Form der Oeffnung.	Theoretische Wassermenge W, Ausfluss in die freie Luft.
	$W_{\smile} = \frac{r^2 \pi}{2} \sqrt{2 g h_{,}} \, (1 - \frac{r^2}{32 h_{,}^2} + \frac{1}{h_{,} \pi}).$
	$W_{\frown} = \frac{r^2 \pi}{2} \sqrt{2 g h} \, (1 - \frac{r^2}{32 h^2} - \frac{1}{h \pi}).$
	$W_{\text{◟}} = \frac{r^2 \pi}{4} \sqrt{2 g h_{,}} \, (1 - \frac{r^2}{32 h_{,}^2} + \frac{1}{h_{,} \pi}).$ $= \frac{W_{\smile}}{2}.$
	$W_{\text{◜}} = \frac{r^2 \pi}{4} \sqrt{2 g h_{,}} \, (1 - \frac{r^2}{32 h_{,}^2} - \frac{1}{h_{,} \pi}).$ $= \frac{W_{\frown}}{2}.$

Form der Oeffnung.	Theoretische Wassermenge W, **Ausfluss in die freie Luft.**
	$W = W_{\text{⌓}} + W_{\square}.$
	$W = W_{\square} + W_{\text{◡}}.$
	Annähernd $W = (a\,b + r^2 \pi) \sqrt{2\,g\,h}.$
	$W = W_{\text{⌓}} + W_{\square} + W_{\text{⌓}}.$

Form der Oeffnung.	Theoretische Wassermenge W, Ausfluss in die freie Luft.
	$W = W_{\triangle} + W_{\bigtriangledown}$ annähernd: $= \frac{b^2}{2}\sqrt{2\,g\,(h_, + \frac{b}{2})}$.
	$W_{=} = (1 - \frac{a^2}{96\,h^2})\,a\,b\sqrt{2\,g\,h}$, annähernd: $= a\,b\sqrt{2\,g\,h}$.
	W annähernd: $= F\sqrt{2\,g\,h}$.
	$W = F\sqrt{2\,g\,h_,}$.

Lage der Oeffnung.	Theoretische Wassermenge W,, Ausfluss unter Wasser.
	$W = F \sqrt{2 g h_{,}}$.
	$W_{,} = F \sqrt{2 g \triangle}$.
	$W_{,} = F \sqrt{2 g \triangle}$.
	$W_{,} = F \sqrt{2 g \triangle}$.

Lage der Oeffnung.	Theoretische Wassermenge W,, Ausfluss unter Wasser.
	$W_{,,} = W_{,} + W$ $= F_{,} \sqrt{2 g \triangle} + W_{,}$ annähernd $= F_{,} \sqrt{2 g \triangle} + F \sqrt{2 g h_{,}}$.
	$W_{,,} = W_{,} + W_{\llcorner\lrcorner}$, oder $+ W_{\cup}$ $= F_{,} \sqrt{2g\triangle} + {}^{2}/_{3} b \triangle \sqrt{2g\triangle}$, oder $= F_{,} \sqrt{2g\triangle} + {}^{2}/_{15} (2B + 3b) \triangle^{3/2} \sqrt{2g}$.

Tafel II zur Korrektion der theoretischen Wassermenge in die wahre.

A. Oeffnungen ohne Einlauf, Mundstück oder Auslauf.

Es bedeutet:

W die theoretische Wassermenge beim Ausfluss in die freie Luft.

$W_,$ die theoretische Wassermenge beim Ausfluss unter Wasser.

$W_{,,}$ die theoretische Wassermenge beim Ausfluss halb unter Wasser, halb in die Luft.

k den Korrektions-Koëffizienten für ganze Oeffnungen.

$k_,$ jenen für Wandeinschnitte.

𝔚 die wahre Wassermenge.

━━ den scharfkantigen Theil der Oeffnung.

—— den kantenlosen Theil der Oeffnung.

Die Druckhöhen h, sind im stillen Wasser zu messen.

Oeffnungen ▭ ohne Mundstück und Einlauf 𝔚 = k W.

Wenn h, in Metern.	k ist bei Oeffnungshöhen in Metern von: 0,2.	0,1.	0,05.	0,03.	0,02.	0,01.	Wenn △ in Metern.
0,005	—	—	—	—	—	0,712	0,005
0,01	—	—	0,619	0,657	0,667	0,704	0,01
0,05	0,597	0,611	0,628	0,642	0,659	0,679	0,05
0,1	0,598	0,614	0,631	0,637	0,654	0,666	0,1
0,5	0,604	0,617	0,628	0,630	0,640	0,644	0,5
1,0	0,605	0,615	0,626	0,628	0,633	0,632	1,0
2,0	0,601	0,607	0,613	0,612	0,612	0,611	2,0
3,0	0,601	0,603	0,606	0,608	0,610	0,609	3,0

Form der Oeffnung.	Wassermenge $\mathfrak{W}$.
	$\mathfrak{W} = 1{,}125 \text{ k W}$.
	$\mathfrak{W} = 1{,}072 \text{ k W}$.
	$\mathfrak{W} = 1{,}035 \text{ k W}$.
p = Umfang der Oeffnung. n = kantenloser Theil.	Für 1, eckiges Profil, $\mathfrak{W} = (1 + 0{,}143 \frac{n}{p}) \text{ k W}$. Für 2, rundes Profil, $\mathfrak{W} = (1 + 0{,}128 \frac{n}{p}) \text{ k W}$.

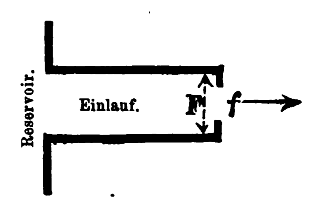
Form der Oeffnung.	h = Meter.	k, =	Wassermenge 𝔚.
2 Decimeter breit.	0,01	0,636	𝔚 = k, W.
	0,02	0,626	
	0,03	0,618	
	0,04	0,611	
	0,06	0,602	
	0,08	0,595	
	0,10	0,593	
	0,15	0,590	
	0,20	0,585	
	0,22	0,578	
Bei grösseren Breiten	—	0,60	𝔚 = k, W.
Wenn b grösser ist als 1/3 der Wand- oder Kanalbreite	—	0,665	𝔚 = k, W.

Form der Oeffnung.	Wassermenge $\mathfrak{W}$.
	$\mathfrak{W} = 1{,}125\ k_{,}\ W.$
oder	$\mathfrak{W} = 1{,}072\ k_{,}\ W.$
oder	$\mathfrak{W} = 1{,}125\ k_{,}\ W.$
oder oder	$\mathfrak{W} = 1{,}125\ k\ W_{,} + 1{,}125\ k_{,}\ W$ $= 1{,}125\left[k F_{,} \sqrt{2 g \triangle} + k_{,}\ {}^{2}/_{3}\, b \triangle \sqrt{2 g \triangle}\right]$

Form der Oeffnung.	Wassermenge $\mathfrak{W}$.
	$\mathfrak{W} = 1{,}072\, k W_{,} + 1{,}125\, k_{,} W$ $= 1{,}072\, k F_{,} \sqrt{2 g \triangle}$ $+ 1{,}125\, k_{,}\, {}^{2}/_{3}\, b \triangle \sqrt{2 g \triangle}$.
	$\mathfrak{W} = 1{,}035\, k W_{,} + 1{,}072\, k_{,} W$ $= 1{,}035\, k F_{,} \sqrt{2 g \triangle}$ $+ 1{,}072\, k_{,}\, {}^{2}/_{3}\, b \triangle \sqrt{2 g \triangle}$.
	$\mathfrak{W} = W_{,,}$ für 1, $\mathfrak{W} = W$ für 2.
	$\mathfrak{W} = 1{,}25\, k W_{,} + W$ $= 1{,}125\, k F_{,} \sqrt{2 g \triangle}$ $+ {}^{2}/_{3}\, b \triangle \sqrt{2 g \triangle}$.

Form der Oeffnung.	Wassermenge $\mathfrak{W}$.
	$\mathfrak{W} = 1{,}035\, k W_{,} + W$ $= 1{,}035\, k \sqrt{2 g \triangle} \cdot F_{,}$ $+ \frac{2}{3} b \triangle \sqrt{2 g \triangle}$.

B. Oeffnungen mit Einlauf.



Es bedeutet:

$\mathfrak{W}$ die wahre Wassermenge, wenn kein Einlauf vorhanden wäre;

W die wahre Wassermenge mit Einlauf;

F das Wasserprofil des Einlaufs;

f das Wasserprofil der Oeffnung.

$n = \frac{f}{F}$.

$\frac{f}{F}$		Wassermenge W.
F, f	Die Druckhöhen im Reservoir gemessen.	$W = (1 + 0{,}0456\,[14{,}821^n - 1])\,\mathfrak{W}.$
F, f		$W = (1 + 0{,}0760\,[9^n - 1])\,\mathfrak{W}.$
f, f, F	Die Druckhöhen 1 Meter vor f gemessen.	$W = (0{,}641\,n^2 + 1)\,\mathfrak{W}.$
f, F		$W = (1{,}718\,n^4 + 1)\,\mathfrak{W}.$

$\frac{f}{F}$		Wassermenge W.
	Die Druckhöhe 1 Meter vor f gemessen.	$W = (1{,}041 + 0{,}693\,n^2)\,\mathfrak{W}$.

C. Oeffnungen mit Mundstücken.

(Kurze Ansatzröhre.)

Es bedeutet:

$\mathfrak{W}$ die wahre Wassermenge;

W die theoretische;

$n = \frac{f}{F}$ das Querschnittsverhältniss zwischen dem Mundstücke und einem etwa vorhandenen Einlauf.

	Mundstück-weite. Centimeter.	Wassermenge 𝔚 aus cylindrischen Mundstücken. (Kurze Ansatzröhre.)
	1	𝔚 = 0,843 W,
	2	𝔚 = 0,832 W,
	3	𝔚 = 0,821 W,
	4	𝔚 = 0,810 W.

	Convergenz-Winkel α	Wassermenge 𝔚 aus konischen Mundstücken. (Kurze Ansatzröhre.)
	4 Grad	𝔚 = 0,905 W,
	8 „	𝔚 = 0,937 W,
	10 „	𝔚 = 0,943 W,
	12 „	𝔚 = 0,946 W,
	14 „	𝔚 = 0,943 W,
	18 „	𝔚 = 0,930 W,
	20 „	𝔚 = 0,921 W,
	24 „	𝔚 = 0,910 W,
	30 „	𝔚 = 0,894 W,
	35 „	𝔚 = 0,882 W,
	40 „	𝔚 = 0,870 W.

Befindet sich vor den Mündungen ein Einlauf, der nicht wenigstens 4 mal breiter ist, als die Mündung, so ist

$$\mathfrak{W} = (1 + 0{,}102\,n + 0{,}067\,n^2 + 0{,}046\,n^3)\,k\,W.$$

D. Oeffnungen mit Mundstück und Einlauf.
(Schützöffnungen.)

Es bedeutet:

$\mathfrak{W}$ die wahre Wassermenge;
W die theoretische.

Schützöffnung.	Neigungs-Winkel α	Wassermenge $\mathfrak{W}$.
	40	$\mathfrak{W} = 0{,}83$ W,
	45	$\mathfrak{W} = 0{,}81$ W,
	50	$\mathfrak{W} = 0{,}79$ W,
	55	$\mathfrak{W} = 0{,}76$ W,
	60	$\mathfrak{W} = 0{,}74$ W,
	α	$\mathfrak{W} = (1 - 0{,}0043\,\alpha^0)$ W.

Steht der Schütz vertikal, so berechne man die Wassermenge ganz so, als ob kein Auslauf (Gerinne) vorhanden wäre. Ist jedoch bei

Schützöffnung.	Wassermenge 𝔚.
	0,15 bis 0,2 Oeffnungshöhe nur 0,5 bis 0,6 Druckhöhe, 0,10 Oeffnungshöhe nur 0,3 bis 0,4 Druckhöhe, 0,05 Oeffnungshöhe nur 0,2 Druckhöhe oder weniger, so rechne man nach folgender Tabelle.

Oeffnungshöhe. Meter.	Druckhöhe über der Mitte der Oeffnung.	*k* für die Anordnungen.					
		1 / 2					
0,2	0,40	0,591	0,580	0,582	0,577	0,603	0,597
	0,24	0,559	0,552	0,550	0,548	0,576	0,573
	0,12	0,483	0,482	0,484	0,485	0,484	0,483
0,1	0,16	0,590	0,580	0,583	0,585	0,606	0,604
	0,11	0,562	0,560	0,561	0,562	0,566	0.564
	0,09	0,523	0,522	0,522	0,517	0.510	0,510
	0,06	0,464	0,463	0,462	0,462	0,460	0,460
0,05	0,20	0,631	0,615	0,618	0,622	0,636	0,628
	0,11	0,614	0,597	0,598	0.601	0,610	0,609
	0,05	0,495	0,493	0,486	0,490	0.462	0,501
	0,04	0,452	0,443	0,442	0,442	0,417	0,
0,03	0,20	0,632	0,631	0,632	0,635	0,650	0,651
	0,06	0,627	0,605	0,602	0,607	0,572	0,594

No. 1 bezeichnet den Durchschnitt,
No. 2 den Grundriss der Gerinne

$\mathfrak{W} = k\,W.$

Tafel zur Berechnung der Rohrleitungen.

Es bedeutet:

H das ganze Gefälle;

h den Gefällverlust beim Eintritt des Wassers in die Leitung;

h_1 „ „ in die Leitung selbst;

h_2 „ „ bei Kniestücken;

h_3 „ „ bei Krümmungen;

h_4 „ „ bei Verengungen;

$h_0 = H - h_1 - h_2 - h_3 - h_4$ das übrig bleibende wirksame Gefälle;

L die Länge der Leitung;

U den inneren Umfang des Rohres;

v die wahre Geschwindigkeit;

$\mathfrak{W}$ die wahre Wassermenge pro Sekunde;

β den Krümmungswinkel;

F und F_1 die Profile bei plötzlichen Verengungen;

$\zeta\ \zeta_1\ \zeta_2\ \zeta_3\ \zeta_4$ Koëffizienten;

W die theoretische Wassermenge pro Sekunde;

k den Ausflusskoëffizienten.

Man rechnet nach folgenden Gleichungen:

1	$h_0 = H - (h + h_, + h_2 + h_3 + h_4)$.
2	$h_0 = \left(1 + \zeta + \zeta_, L \frac{U}{F} + \zeta_2 + \zeta_3 \frac{\beta}{\pi} + \zeta_4\right) \frac{v^2}{2g}$.
3	$v = \frac{\sqrt{2 g h_0}}{\sqrt{1 + \zeta + \zeta_, L \frac{U}{F} + \zeta_2 + \zeta_3 \frac{\beta}{\pi} + \zeta_4}}$.
4	für kreisförmigen Querschnitt des Rohres ist $W = r^2 \pi \sqrt{2 g H}$
5	für rektangulären Querschnitt des Rohres ist $W = a b \sqrt{2 g H}$
6	$\mathfrak{W} = v \times$ Querschnitt des Rohres,

7 Für gerade und lange Leitungen kann man, wenn darin keine Hähne, Ventile etc. vorkommen:

$h_2 = 0\ h_3 = 0\ h_4 = 0$ setzen und hat dann einfach

$\bar{h}_0 = H - (h + h_{,})$, oder

8 $$h_0 = \left(1 + \zeta + \zeta_{,} L \frac{U}{T}\right) \frac{v^2}{2g}.$$

9 $$v = \frac{\sqrt{2 g h_0}}{\sqrt{1 + \zeta + \zeta_{,} L \frac{U}{F}}}.$$

Da gemeinhin ζ sehr klein gegen $\zeta_{,}$, so hat man auch:

10 $$h_0 = \left(1 + \zeta_{,} L \frac{U}{F}\right) \frac{v^2}{2g} \quad \text{und} \quad v = \frac{\sqrt{2 g h_0}}{\sqrt{1 + \zeta_{,} L \frac{U}{F}}}.$$

In diesen Gleichungen ist:

Figur.	Formel.
	$h = \zeta \frac{v^2}{2g}$ und $\zeta = \frac{1}{k^2} - 1.$
	$h_{,} = \zeta_{,} L \frac{U}{F} \cdot \frac{v^2}{2g}$ und $\zeta_{,} = 0{,}0035975 + \frac{0{,}00237775}{\sqrt{v}}.$
	$h_2 = \zeta_2 \frac{v^2}{2g}$ und $\zeta_2 = 0{,}9457 \sin. \delta^2 + 2{,}047 \sin. \delta^4.$
R = Krümmungshalbmesser. r = halbe Rohrweite.	$h_3 = \zeta_3 \frac{\beta}{\pi} \cdot \frac{v^2}{2g}$ und $\zeta_3 = 0{,}131 + 1{,}847 \left(\frac{r}{R}\right)^{7/2}$ für kreisförmigen Querschnitt. $\zeta_3 = 0{,}124 + 3{,}104 \left(\frac{r}{R}\right)^7$ für rechteckigen Querschnitt.
	$h_4 = \zeta_4 \frac{v^2}{2g},$ $\zeta_4 = \left(\frac{F}{k_{,,} F_{,}} - 1\right)^2,$ wobei $k_{,,}$ den Kontraktions-Koëffizienten bezeichnet.

Werthe des Koëffizienten ζ_1.

v =	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
		Meter.								
0	∞	0,01107	0,00890	0,00793	0,00735	0,00695	0,00665	0,00643	0,00625	0,00610
1	0,00598	0,00585	... 575	... 568	... 560	... 553	... 548	... 543	... 538	... 533
2	... 528	... 523	... 520	... 515	... 513	... 510	... 508	... 505	... 503	... 500
3	... 498	... 495	... 493	... 490	... 488	... 490	... 485	... 483	... 483	... 48
4	... 477	... 477	... 475	... 475	... 473	... 473	... 470	... 470	... 468	... 46

Werthe der Koëffizienten ζ_2 und ζ_3.

δ^0	10°	20°	30°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	Profil.
ζ_2	0,046	0,139	0,364	0,740	0,984	1,260	1,556	1,861	2,158	2,431	▨ u. ◍

r/R	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	Profil.
ζ_3	0,131	0,138	0,158	0,206	0,294	0,440	0,661	0,977	1,408	1,978	◍
ζ_3	0,124	0,135	0,180	0,250	0,398	0,643	1,015	1,546	2,271	3,228	▨

Werthe des

								Hahn im Rohr.	
$\frac{F}{F_{,}}$	ζ_4	$\frac{F}{F_{,}}$	ζ_4	$\frac{F}{F_{,}}$	ζ_4	Stell-höhe	ζ_4	Stell-∢ 0	ζ_4
0,1	231,7	0,1	225,9	0,1	193,00	$^7/_8$	97,8	5	0,05
0,2	50,99	0,2	47,77	0,2	44,5	$^6/_8$	17,0	10	0,31
0,3	19,78	0,3	17,50	0,3	17,8	$^5/_8$	5,52	15	0,88
0,4	9,612	0,4	7,801	0,4	8,12	$^4/_8$	2,06	20	1,84
0,5	5,256	0,5	3,753	0,5	4,02	$^3/_8$	0,81	25	3,45
0,6	3,077	0,6	1,796	0,6	2,08	$^2/_8$	0,26	30	9,15
0,7	1,876	0,7	0,797	0,7	0,95	$^1/_8$	0,07	35	11,2
0,8	1,169	0,8	0,290	0,8	0,39	0	0,00	40	20,7
0,9	0,734	0,9	0,060	0,9	0,09	—	—	45	41,0
1,0	0,080	1,0	0,000	1,0	0,00	—	—	50	95,3
—	—	—	—	—	—	—	—	55	275,0
—	—	—	—	—	—	—	—	67	∞
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Koëffizienten ζ_4.

Hahn im ○ Rohr.		Drehklappe im □ Rohr.		Drehklappe im ○ Rohr.		F / F.	
Stell-∢	ζ_4	Stell-∢	ζ_4	Stell-∢	ζ_4	Oeffnungs-∢	ζ_4
5°	0,05	5°	0,28	5°	0,24	15	90,0
10	0,29	10	0,45	10	0,52	20	62,0
15	0,75	15	0,77	15	0,90	25	42,0
20	1,56	20	1,34	20	1,54	30	30,0
25	3,10	25	2,16	25	2,51	35	20,0
30	5,47	30	3,54	30	3,91	40	14,0
35	9,68	35	5,72	35	6,22	45	9,5
40	17,3	40	9,27	40	10,8	50	6,6
45	32,2	45	15,07	45	18,7	55	4,6
50	52,6	50	24,9	50	32,6	60	3,2
55	106,0	55	42,7	55	58,8	65	2,3
60	206,0	60	77,7	60	118,0	70	1,7
65	486,0	65	158,0	65	256,0	—	—
82	∞	70	368,0	70	751,0	—	—

$\zeta_4 = \left(1{,}645 \frac{F}{F_{,}} - 1\right)^2$, wenig veränderlich, im Mittel $\zeta_4 = 10$ bis 11.

Stoss des Wassers.

1) Durch einen Wasserstrahl.

Bezeichnet

P den Stoss oder hydraulischen Druck eines Wasserstrahles gegen eine Fläche in Kilogr.,

F den Querschnitt des Strahles in Quadr.-Metern,

v die Geschwindigkeit des Wassers in Metern pro Sek.,

c die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Fläche in der Richtung des Wasserstrahles bewegt, in Metern pro Sek.

Q die Wassermenge, welche pro Sek. zum Stosse gelangt, in Cub.-Metern,

γ das Gewicht eines Cub.-Meter Wasser in Kilogr.,

so hat man:

a) Für den Stoss normal gegen eine ebene Fläche:

$$P = \frac{v - c}{g} Q \gamma,$$

und wenn die Fläche in Ruhe ist:

$$P = 2 \frac{v^2}{2g} F \gamma = 2 F h \gamma.$$

b) Für den Stoss gegen eine hohle Fläche, durch welche die Richtung des Strahles in die entgegengesetzte verwandelt wird:

$$P = 2 \frac{v - c}{g} Q \gamma,$$

und wenn die Fläche in Ruhe ist:

$$P = 4 \frac{v^2}{2g} Q \gamma = 4 F h \gamma.$$

c) Die Leistung $L = P c$ des Stosses ist ein Maximum, wenn $c = \frac{v}{2}$, und ist alsdann:

beim Normalstosse gegen eine ebene Fläche:

$$L = \frac{1}{2} \frac{v^2}{2g} Q \gamma = \frac{1}{2} Q h \gamma,$$

beim Stosse gegen eine hohle Fläche, welche den Strahl in die entgegengesetzte Richtung umbiegt:

$$L = \frac{v^2}{2g} Q \gamma = Q h \gamma.$$

2) Stoss des unbegrenzten Wassers.

Bezeichnet

F den Querschnitt der die Wirkung des Wassers aufnehmenden Fläche in Quadr.-Metern,
v die relative Geschwindigkeit des Wassers und des Querschnitts in Metern pro Sek.,
P den gegen die Fläche ausgeübten Druck in Kilogr.,
γ das Gewicht eines Cub.-Meter Wasser,
k einen von der Form der Fläche abhängigen Koëffizienten,

so hat man

$$P = k \frac{v^2}{2g} F \gamma.$$

Für eine dünne unbewegliche Platte, welche senkrecht gegen die Richtung der Strömung gehalten wird, ist:

$$k = 1,86,$$

bewegt sich aber die Platte in ruhendem Wasser, so ist:

$$k = 1,25.$$

Für einen prismatischen Körper hat man:

bei der relativen Länge .... $\frac{L}{\sqrt{F}} =$	1	2	3
wenn der Körper unbeweglich ... k =	1,48	1,35	1,33
wenn der Körper sich in ruhendem Wasser bewegt .... k =	1,28	1,30	1,33

Für ein Prisma, welches nur zum Theil in Wasser eingetaucht ist, und dessen Länge gleich der 5- bis 6fachen Breite, ist:

$$k = 1{,}00,$$

befindet sich am Vordertheil des schwimmenden Prisma's eine Zuschärfung, so hat man:

für eine Zuschärfung von	156°	60°	18°
k =	0,96	0,44	0,40.

Noch mehr wird der Widerstand vermindert, wenn man am Vorder- und Hintertheile Zuschärfungen und gekrümmte Seitenflächen gibt.

Für sehr gut gebaute Flussdampfschiffe kann man im Mittel annehmen:

$$k = 0{,}16 \text{ bis } 0{,}18.$$

Für sehr gut gebaute Seedampfschiffe:

$$k = 0{,}07 \text{ bis } 0{,}11.$$

Für Kanaldampfschiffe:

$$k = 0{,}24 \text{ bis } 0{,}33.$$

Statik und Dynamik der Luft.

A. Tabelle über den Atmosphärendruck in preussischen, englischen und französischen Maassen.

Die Angaben sind für den praktischen Gebrauch abgerundet.

	Quecksilbersäule.	Wassersäule.	Druck pro Quadrat-Zoll.
Preussen . . .	29 Zoll.	32,8 Fuss.	14 Pfund.
England . . .	29,9 „	33,9 „	14,7 „
Paris	28 „	31,7 „	p. Qu.-Centim.
Frankreich . .	76 Centim.	10,3 Met.	1,03 Kilogr.

1 Pfund Druck pro Quadr.-Zoll preuss. = 5,43 Centim. Quecksilbersäule = 28,1 Zoll Wassersäule.

1 Kilogr. Druck pro Quadr.-Centim. = 73,5 Centim. Quecksilbersäule, also nahe = 1 Atmosphärendruck.

B. Mariotte'sches Gesetz.

Bei constanter Temperatur ist die Spannung eines Luftquantums seinem Volumen umgekehrt proportional.

Bezeichnet daher

p die Spannung, V das Volumen, γ das spec. Gewicht eines Luftquantums,

p_1, V_1, γ_1 die Werthe von p, V und γ für einen andern Zustand des Luftquantums, so hat man:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{V_1}{V}.$$

C. Gay-Lussac'sches Gesetz.

1) Bei constanter Spannung sind nach dem Gay-Lussac'schen Gesetze die Volumänderungen eines Luftquantums proportional seinen Temperaturänderungen.

Der Ausdehnungskoëffizient beträgt für 1° Cels.

0,00367, abgerundet = 0,004.

Bezeichnet daher:

V das Volumen, γ das spec. Gewicht eines Luftquantums bei der Temperatur t^0 Cels.,

V_1 das Volumen, γ_1 das spec. Gewicht eines Luftquantums bei der Temperatur t_1^0 Cels.,

so hat man:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{1 + 0{,}004\, t_1}{1 + 0{,}004\, t}.$$

2) Ist ausserdem p die Spannung bei dem Volumen V, p_1 die Spannung bei dem Volumen V_1, so hat man:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{1 + 0{,}004\, t_1}{1 + 0{,}004\, t} \cdot \frac{p}{p_1}.$$

3) Bei einer Temperatur von t^0 Cels. und einer Spannung von p Kilogr. pro Quadr.-Centim. wiegt:

$$(1 \text{ Cub.-Meter Luft} = \frac{1{,}252\, p}{1 + 0{,}004\, t} \text{ Kilogr.})$$

4) Wenn ein gewisses Luftquantum plötzlich sein Volumen ändert, so erleidet auch die Temperatur desselben eine Aenderung, und man hat alsdann:

$$\frac{1 + 0{,}004\, t_1}{1 + 0{,}004\, t} = \left(\frac{V}{V_1}\right)^{0,41} = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^{0,41} = \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{0,41}{1,41}}.$$

Für Ueberschlags-Rechnungen kann man annehmen:

$$\frac{1 + 0{,}004\, t_1}{1 + 0{,}004\, t} = \sqrt{\frac{V}{V_1}} = \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma}} = \sqrt{\frac{p_1}{p}}.$$

D. Ausfluss der Luft aus der Oeffnung eines Gefässes.

Bezeichnet

- h den Ueberdruck der Luft im Gefässe, durch eine Wassersäule gemessen, in Metern,
- g die Beschleunigung der Schwerkraft,
- d das spec. Gewicht der ausströmenden Luft oder des ausströmenden Gases,
- F den Querschnitt der Ausflussmündung in Quadr.-Metern,
- μ den Ausflusskoëffizienten im Mittel = 0,70,

so hat man das Ausflussquantum, welches unter dem äussern Luftdrucke pro Sek. ausströmt:

$$Q = \mu F \sqrt{2 g \frac{h}{d}}.$$

Für atmosphärische Luft darf man annehmen:

$$\frac{1}{d} = 800,$$

und hat dann:

$$Q = 125 \mu F \sqrt{h} = 88 F \sqrt{h} \text{ Cub.-Meter.}$$

E. Druck des Windes gegen eine Fläche.

Bezeichnet v die Geschwindigkeit des Windes in Metern pro Sek., so beträgt der Druck gegen eine ruhende Fläche:

$$0{,}1185\, v^2 \text{ Kilogr. pro Quadr.-Meter.}$$

Tabelle
für die Geschwindigkeit und Kraft des Windes.

Bezeichnung für die Stärke des Windes.	Geschwindigkeit pro Sek. Meter.	Druck pro Quadr.-Meter. Kilogr.
Mässig	ca. 2,5	0,76
Frisch	„ 4,7	2,64
Lebhaft, zweckmässig für Windmühlen . . .	„ 6,9	5,58
Heftig	„ 12,6	18,8
Sturm	„ 25,1	74,6
Orkan	„ 40,8	197,0

Der Druck des Windes gegen einen Cylinder (Gasbehälter) beträgt 0,57 desjenigen Druckes, der gegen eine Fläche = der Projektion des Cylinders ausgeübt wird.

Belastung der Bau-Konstruktionstheile.

Maximum der zufälligen Belastung bei:

Dachräumen	500	Pfd. pro □Met.
Wohnräumen	460	„ „ „
Tanzsälen	760	„ „ „
Heuböden	800	„ „ „
Fruchtböden	900	„ „ „
Wegebrücken	1250	„ „ „
Speichern	1500	„ „ „
Magazinen	3000	„ „ „

Totalbelastung (Eigengewicht + Nutzlast) für Wohnräume, bei:

a. einfacher bedielter Balkenlage	560	„ „ „
b. gestrecktem Winkelboden	850	„ „ „
c. gestaakter, beschütteter und geputzter Decke	1000	„ „ „
d. bei ganzem Winkelboden	1150	„ „ „

Totalbelastung für Decken unter:

Tanzsälen	1400	„ „ „
Werkstätten	1550	„ „ „

Totalbelastung für gewölbte Decken mit Fussboden . . . . 1550 „ „ „

desgl. für:

eiserne Dächer	300—400 Pfd.	pro	□Met.	
Schieferdächer	400—500	„	„	„
Ziegeldächer.	450—550	„	„	„

Eigengewicht eiserner Brücken, pro Geleis, wenn l die Spannweite bedeutet:

a. für l = 10—60 Meter
7,5 + 0,51 Centner pro lauf. Meter

b. für l = 60—100 Meter
8 + 0,61 „ „ „

Totalbelastung einer Brücke bei
starkem Menschengedränge 500—600 Pfd. „ □Meter.

Für Eisenbahnbrücken rechnet man pro Geleis 2 Lokomotiven mit Tender in der Mitte und für den übrigen Theil der Brückenbahn 450—550 Pfd. pro □Meter.

I. Konstruktion der einfach gedrückten oder gezogenen Verbandstücke.

Die gezogenen und einfach gedrückten Verbandstücke unterliegen keiner Biegung.

Bedeutet

k die Druck- oder Zugspannung pro □Centim., bei der das Material zerstört wird,

μ den Sicherheitsmodul,

f den Querschnitt eines Verbandstückes,

P die Zug- oder Druckkraft, die es dauernd auszuhalten hat, so ist

$$P = \mu f k \text{ und}$$

$$f = \frac{P}{\mu k}.$$

Für Schmiedeeisen ist $\mu = 1/5$,
„ Gusseisen bei Zug . $= 1/5$,
„ Gusseisen bei Druck $= 1/10$,
„ Stahl gehärtet . . . $= 3/10$,
„ Stahl ungehärtet . . $= 1/6$.
„ Kupfer mit Zug . . $= 1/8$,
„ Kupfer mit Druck . $= 1/16$,
„ Hölzer u. Bausteine $= 1/10$.

Bei starken Erschütterungen, stark wechselnder Belastung und anderen die Haltbarkeit beeinträchtigenden Einflüssen, nehme man μ etwas kleiner an.

Tabelle über die Zug- und Druckfestigkeit der Baumaterialien.

Material.	Die Zerstörung erfolgt durch	
	Zug bei Pfund pro Qu.-Ctm.	Druck bei Pfund pro Qu.-Ctm.
Schmiedeeisen in Stäben	8000	7000
Schmiedeeisen in Drähten . . .	13000	—
Gusseisen	2600	15000
Stahl ungehärtet	15000	—
Stahl gehärtet	20000	—
Kupfer	4000	8000
Kupferdraht	8000	—
Messing	2400	1500
Messingdraht	7200	—
Blei	260	1000
Eichen-Holz	2400	1320
Kiefern- „	2200	1000
Buchen- „	2200	1200
Mauersteine	60	60—170
Klinker	—	200—500
Kalkstein und Marmor	—	400—800
Sandstein	—	320—1000
Granit	—	800—1600
Basalt	—	3600

Tabelle der spec. Gewichte.

1. Feste Körper.

Körper	Spec. Gewicht
Antimon	6,72
Asphalt	1,07—1,16
Basalt	2,8
Blei	11,4
Braunkohle	1,2
Cokes	1,4
Eis	0,92
Erde,	
lehmig frisch	2,1
trocken	1,9
mager trocken	1,3
Glas,	
Fenster-	2,64
Spiegel-	2,46
Krystall-	2,89
Flint-	3,33
Glockenmetall	8,8
Gold, gegossen	19,26
Granit	2,8
Gusseisen	7,25
Gyps, gegossen,	
trocken	0,79
Holz, lufttrocken,	
Ahorn-	0,67
Aepfelbaum-	0,73
Birken-	0,74
Buchen-	0,75
Buxbaum-	0,94
Eben-, grün	1,21
„ schwarz	1,19
Eichen-	0,69
Erlen-	0,5
Eschen-	0,67
Holz, lufttrocken,	
Fichtenholz	0,47
Kiefern-	0,55
„ frisch	0,91
Kork-	0,24
Lerchen-	0,47
Linden-	0,56
Mahagoni-	0,75
Nussbaum-	0,66
Pappel-	0,39
Pock-	1,26
Tannen-	0,56
„ frisch	0,89
Weissbuchen-	0,77
Kalkstein	2,45
Kreide	2,7
Kupfer, gehämmert	8,94
„ gegossen	8,79
Mauerwerk,	
Bruchstein-	2,40—2,46
Sandstein-	2,05—2,12
Ziegelstein-	1,47—1,70
Messing	8,55
Platina	22,7
Quarz	2,62
Sand, gewöhnlich	
trocken	1,64
Sandstein	2,35
Schiefer	2,67
Schmiedeeisen	7,78
Silber	10,47
„ gehämmert	10,51
Stahl	7,26—7,80

Gussstahl . . .	7,872	Ziegelstein . . .	1,4—2,2
Steinkohle . .	1,21—1,51	Zink, gegossen . . .	6,80
„ Cannel . .	1,42	„ gewalzt . . .	7,00
Wismuth	9,83	Zinn	7,29

2. Flüssige Körper.

Aether b. 20° C. . .	0,716	Oel: Olivenöl . . .	0,915
Alkohol, abs. b. 20° C.	0,792	Quecksilber b. 0°. .	13,595
Luft	0,0013	Salpetersäure, conc. .	1,500
Milch	1,030	Salzsäure, conc. . .	1,200
Oel: Leinöl . . .	0,940	Schwefelsäure, conc.	1,850
Rüböl . . .	0,914	Seewasser	1,027

3. Gasförmige Körper, bei 0° C. und 0,76 Met. Druck.

Atmosph. Luft . .	1,000	Sauerstoff	1,103
Kohlenoxydgas . .	0,941	Stickstoff	0,976
Kohlensäure . . .	1,529	Steinkohlengas .	0,4—0,6
Oelbildendes Gas .	0,985	Wasserstoff . . .	0,069
Grubengas . . .	0,559	Wasserdampf b. 100°	0,470

1 Cub.-Meter destillirtes Wasser wiegt 1000 Kilogr. oder 2000 Zoll-Pfund.

Bedeutet γ das specifische Gewicht eines Stoffes, V sein Volumen in Cub.-Metern, so ist das absolute Gewicht:

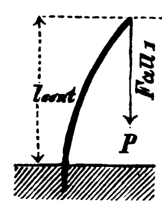
$$G = V\gamma \; 1000 \text{ Kilogr. oder}$$
$$G = V\gamma \; 2000 \text{ Zoll-Pfund.}$$

II. Konstruktion der gedrückten und zugleich auf Biegung beanspruchten Verbandstücke.

(Streben und Säulen.)

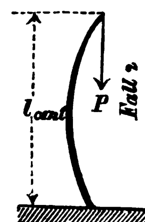
---

a. Centrische Belastung.



Das untere Ende ist eingespannt:

$$P = a \frac{E J \pi^2}{4 l^2}.$$



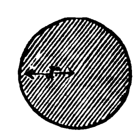
Beide Enden sind frei:

$$P = a \frac{E J \pi^2}{l^2}.$$

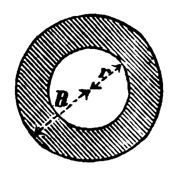
Darin ist:

	a =	E pro □ Cent. =
Für Schmiedeeisen . . .	$^1/_5$	4000000 Pfund
„ Gusseisen	$^1/_6$	2340000 „
„ Holz	$^1/_{10}$	234000 „

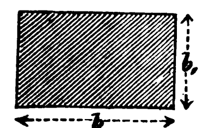
Ferner ist für die nachfolgenden Profilformen:



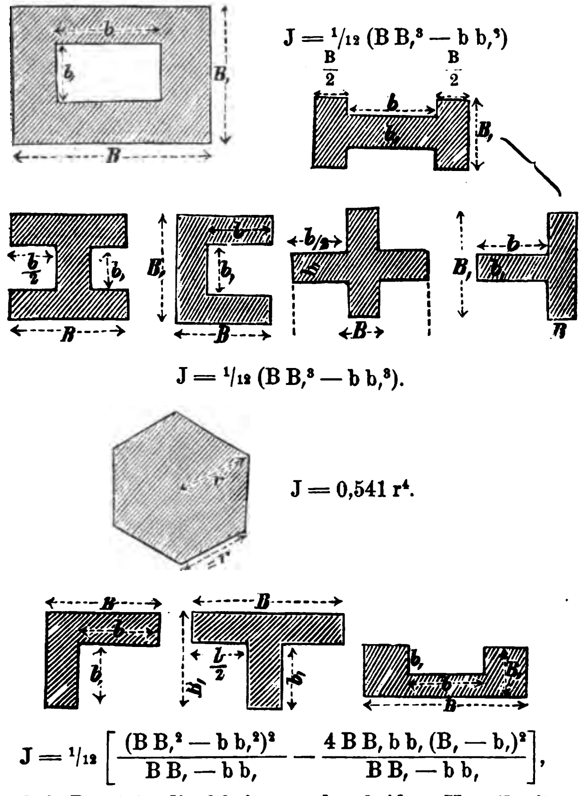
$$J = \frac{\pi r^4}{4}.$$



$$J = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4).$$



$$J = {}^1/_{12}\, b\, b_{,}^{3}.$$



$$J = {}^1/_{12}\,(B\,B,^3 - b\,b,^3)$$

$$J = {}^1/_{12}\,(B\,B,^3 - b\,b,^3).$$

$$J = 0{,}541\,r^4.$$

$$J = {}^1/_{12}\left[\frac{(B\,B,^2 - b\,b,^2)^2}{B\,B, - b\,b,} - \frac{4\,B\,B,\,b\,b,\,(B, - b,)^2}{B\,B, - b\,b,}\right],$$

wobei B, stets die kleinere der beiden Hauptbreiten-Dimensionen des Profils bedeutet.

Für Façon-Eisen von der Form **T I L [+** etc.,

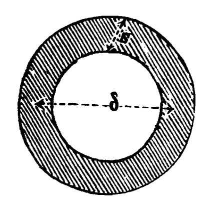
kann man P annähernd berechnen nach der Gleichung:

$$P = 15 \frac{f k h}{l}.$$

Darin ist:
f der Querschnitt des Stabes,
l die Länge des Stabes,
h die kleinste der beiden Breitendimensionen des Profils.

Ferner:

		pro Qu.-Centim.
Für Schmiedeeisen	. . . .	k = 1400 bis 1680 Pfund,
„ Gusseisen	. . . .	k = 1000 „ 1120 „



Für hohle gusseiserne Säulen hat man annähernd:

Im Falle 1

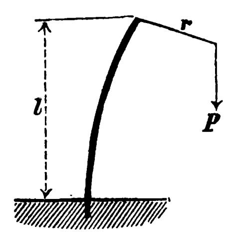
$$2\,s\,\delta^3 = \frac{P l^2}{200000},$$

Im Falle 2

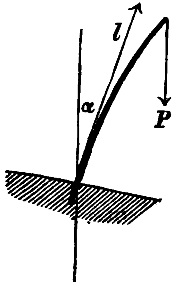
$$2\,s\,\delta^3 = \frac{P l^2}{800000},$$

wobei die Maasse in Centim., P in Zoll-Pfd. zu nehmen.

b. Excentrische Belastung.



$$P = \frac{k}{\frac{1}{f} + \frac{r}{Z}}.$$



$$P = \frac{k}{\frac{\cos.\alpha}{f} + \frac{l \sin.\alpha.}{Z}}$$

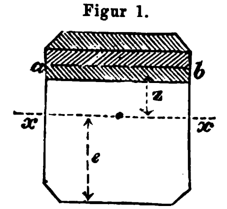
Darin ist:

f der Querschnitt des Stabes,
k für Schmiedeeisen = 1400 bis 1680 Pfd. pro □Centim.
k „ Gusseisen . . = 1000 „ 1120 „ „ „
k „ Holz . . . = 140 „ 170 „ „ „
Z = den Werthen aus Tabelle I. IIIa. Seite 364.

III^a. Konstruktion der massiven Träger und Balken.

Ist das Profil des projektirten Trägers verzeichnet, so suche man den Schwerpunkt desselben und lege durch denselben die horizontale Axe x x. Alsdann messe man den Abstand der entferntesten Faserschicht und bezeichne ihn mit e.

Figur 1.



Darauf zerlege man das ganze Profil in lauter schmale Streifen a b, und messe deren mitteln Abstand z von x x mit dem Zirkel nach.

Sind nun f_1 f_2 f_3 u. s. w. die Flächeninhalte dieser schmalen Streifen in □Centimetern, und z_1 z_2 z_3 u. s. w. ihre Abstände von x x in Centimetern, so addire man:

$$+ f_1 z_1^2$$
$$+ f_2 z_2^2$$
$$+ f_3 z_3^2$$
u. s. w.

und dividire die Summe mit e. Die Zahl, welche herauskommt, ist mit Z in den nachfolgenden Formeln be-

zeichnet. Für die gewöhnlich vorkommenden Profile kann man sich der nachfolgenden Tabelle I zur leichteren Ermittelung von Z bedienen.

Bezeichnet L die Träger- oder Balkenlänge in Metern, so nehme man den Widerstand W, welchen der Baustoff dauernd dem Zerbrechen oder Verbiegen entgegen setzt, wie folgt an:

a. für Tanne, Fichte, Kiefer, Lerche $W = \frac{1,2}{L} \cdot Z$;

b. für trockenes Buchen- u. Eichenholz . . . . $W = \frac{1,4}{L} \cdot Z$;

c. für Eschenholz . . . . $W = \frac{1,8}{L} \cdot Z$;

d. für Schmiedeeisen in dicken Stücken $W = \frac{16,0}{L} \cdot Z$;

e. für Gusseisen . . . . $W = \frac{12,0}{L} \cdot Z$.

Die Tragkraft des Trägers berechne man nun nach den Formeln der nachstehenden Belastungstafel.

Es bedeutet hier:

G das Eigengewicht des Trägers;

Q, eine etwaige gleichmässig vertheilte Last;

Q eine lokale Last.

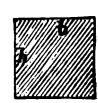
Alles in Zollpfunden.

Für Träger, die nicht aus einem Stücke bestehen, sondern aus mehreren zusammengefügt sind, nehme man

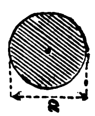
$^3/_4$ der berechneten Tragkraft.

Tabelle I.

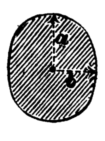
über die Werthe von Z bei den am häufigsten vorkommenden Profilen:



$$Z = \frac{b\,h^2}{6}.$$

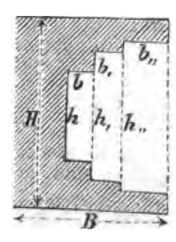


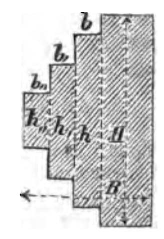
$$Z = 0{,}0982\;a^3.$$

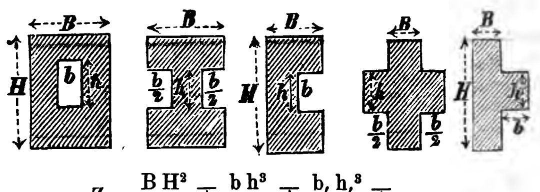


$$Z = 0{,}7854\;b\,a^2.$$

Für alle gefiederten oder ausgenommenen, zur horizontalen Schweraxe symmetrischen Profile:



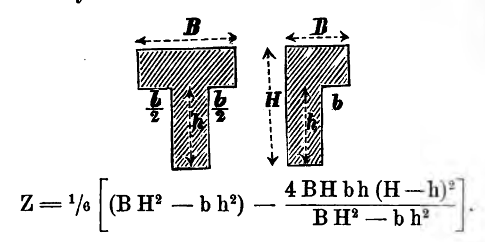




$$Z = \frac{B\,H^2}{6} \mp \frac{b\,h^3}{6\,H} \mp \frac{b_,\,h_,^3}{6\,H} \mp \cdots$$

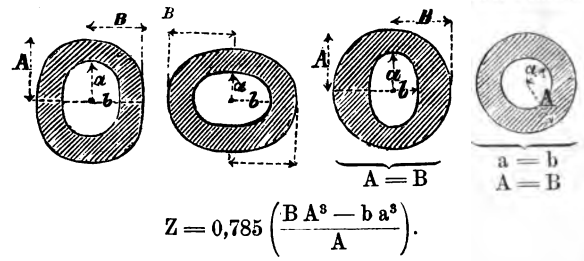
und zwar gilt das — Zeichen für ausgenommene, das + Zeichen für gefiederte Profile.

Für unsymmetrische Profile:



$$Z = {}^1/_6 \left[(B\,H^2 - b\,h^2) - \frac{4\,B\,H\,b\,h\,(H-h)^2}{B\,H^2 - b\,h^2} \right].$$

Für alle kreisförmigen oder elliptischen hohlen Profile:



$$Z = 0{,}785 \left(\frac{B\,A^3 - b\,a^3}{A} \right).$$

Für Eisenbahnschienen nehme man durchschnittlich:

Bei einer Höhe von Centim.	Z =	Gewicht pro Meter.
10,5	89,5	57,4 Pfund.
11,8	102,0	64 Pfund.
13,1	125,2	76—80 Pfund.
	Das 3fache obiger Zahlen.	Das 2fache obiger Zahlen.

Für I Eisen nehme man:

Höhe. Mill.	Steg-dicke. Mill.	Gurt-breite. Mill.	Gurt-dicke. Mill.	Gewicht pro Meter. Pfund.	Z
100	5	50	7	17,16	35
100	13	58	7	28,6	49
125	6	75	8	28,2	76
125	13	82	8	40,0	94
150	7	80	9,5	37,1	118
150	13	86	9,5	50,0	140
176	8,5	91,5	9	54,0	160
176	23	106,5	9	88,6	238
200	9	100	11	58,6	239
200	23	114	11	100,8	332
209	13	104,6	14,6	80,2	347
209	19,6	111,2	14,6	99,8	393
235	8,5	91,5	9	60,6	240
235	23	106,5	9	107,6	375
235	13	91,5	14	81	352
235	26	104,5	14	125,0	469
250	11	115	13	83,0	419
250	26	130	13	137,0	575
261	11	98,1	13	83,4	423
261	16,5	104	13	104,6	468
300	13	125	16	115,2	677
300	26	138	16	170,0	875
320	16	137	19	150,4	1021
400	16	140	17	164	1200
588	19	200	17	300	2862
596	19	200	17	320	3578
800	19	200	17	362	4383
1000	19	200	17	422	6136

Für 4kantige Balken findet man Z, indem man die Zahlen in Kol. II der folgenden Tabelle mit der Breite des Balkens in Centimetern multiplicirt.

I. Balkenhöhe. Centim.	II. $\frac{Z}{b}$	I. Balkenhöhe. Centim.	II. $\frac{Z}{b}$	I. Balkenhöhe. Centim.	II. $\frac{Z}{b}$
10	$16^{2}/_{3}$	20	$66^{2}/_{3}$	30	150
12	24	22	$80^{2}/_{3}$	32	$170^{2}/_{3}$
14	$32^{2}/_{3}$	24	96	34	$192^{2}/_{3}$
16	$42^{2}/_{3}$	26	$112^{2}/_{3}$	36	216
18	54	28	$130^{2}/_{3}$	38	$240^{2}/_{3}$
40	$266^{2}/_{3}$	50	$416^{2}/_{3}$	60	600
42	294	52	$450^{2}/_{3}$	62	$640^{2}/_{3}$
44	$322^{2}/_{3}$	54	486	64	$682^{2}/_{3}$
46	$352^{2}/_{3}$	56	$522^{2}/_{3}$	66	726
48	384	58	$560^{2}/_{3}$	68	$770^{2}/_{3}$
70	$816^{2}/_{3}$	80	$1066^{2}/_{3}$	90	1350
72	864	82	$1120^{2}/_{3}$	92	$1410^{2}/_{3}$
74	$912^{2}/_{3}$	84	1176	94	$1472^{2}/_{3}$
76	$962^{2}/_{3}$	86	$1232^{2}/_{3}$	96	1536
78	1014	88	$1290^{2}/_{3}$	98	$1600^{2}/_{3}$
				100	$1666^{2}/_{3}$

Für das Eigengewicht G ist zu rechnen, bei trockenem

Eichen- und Eschenholz . . 1360 Pfund pro Cub.-Meter,
Lerchen- und Fichtenholz . 940 „ „ „
Tannen- und Kiefernholz . 1120 „ „ „
Buchenholz . . . . 1500 „ „ „

Belastungstafel.

	Art der Belastung.	
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		
6.		
7.		

Tragkraft in Pfunden.	
$Q = W - {}^{1}/_{2}\, G.$	
$Q = 2\, W - G.$	
$Q_{,} = 2\, W - G.$	
$Q_{,} = 2\,(W - Q) - G$	$Q = W - \frac{Q_{,} + G}{2}.$
$Q_{,} = 2\, W - Q - G$	$Q = 2\, W - Q_{,} - G.$
$Q = 4\, W - \frac{G}{2}.$	
$Q_{,} = 8\, W - G.$	

	Art der Belastung.	
8.	Q_1 $L/2$ Q	
9.	Q L	
10.	Q_1 $L/2$ Q	
11.	$\frac{L}{2}$ Q	
12.	$L/2$ Q	
13.	Q L	
14.	Q_1 $L/2$ Q	

Tragkraft in Pfunden.	
$Q_{,} = 8\,W - 2\,Q - G$	$Q = 4\,W - \frac{Q_{,} + G}{2}$.
$Q_{,} = 12\,W - G.$	
$Q_{,} = 12\,W - {}^{3}/_{2}\,Q - G$	$Q = 8\,W - {}^{2}/_{3}\,(Q_{,} + G).$
$Q = 8\,W - {}^{2}/_{3}\,G.$	
$Q = {}^{16}/_{3}\,W - {}^{2}/_{3}\,G.$	
$Q_{,} = 8\,W - G.$	
$Q_{,} = 8\,W - {}^{3}/_{2}\,Q - G$	$Q = {}^{16}/_{3}\,W - {}^{2}/_{3}\,(Q_{,} + G).$

	Art der Belastung.	Tragkraft
15.	$Q_{,,}$; l_1; Q	
16.	L; $l_,$; Q; $\frac{L}{l_,} = m$	
17.	$L/_2$; $L/_2$; $l_,$; c; Q oder Q_o; $\frac{L}{l_,} = m$; c; $l_,$; Q oder Q_o	$Q = m\sqrt{2WG} - \frac{G}{2}m$, $Q_o = W\frac{m^2}{m-1} - \frac{G}{2}$,
18.	$Q_,$ oder $Q_{,,}$; $l_,$; c; $L/_2$; Q oder Q_o; $Q_,$ od. $Q_{,,}$; $L/_2$; c; $l_,$; $\frac{L}{l_,} = m$; Q od. Q_o	$Q = m\left(\sqrt{2W(Q_, + G)} - \frac{Q_, + G}{2}\right)$, $Q_, = 2W\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{Q}{Wm}}\right)^2 - G$, $Q_o = W\frac{m^2}{m-1} - \frac{Q_, + G}{2}$, $Q_{,,} = 2W\frac{m^2}{m-1} - G - 2Q_,$

in Pfunden.

$Q_{,} = 2W - \frac{2}{m}Q - G$	$Q = m\left(W - \frac{Q_{,} + G}{2}\right).$

$$Q = Wm - \frac{Gm}{2}.$$

giltig wenn $\frac{Q}{G} < \frac{C}{l_{,}}$,

Bruch zwischen Q und Mitte.

giltig wenn $\frac{Q}{G} \geqq \frac{C}{l_{,}}$,

Bruch bei Q.

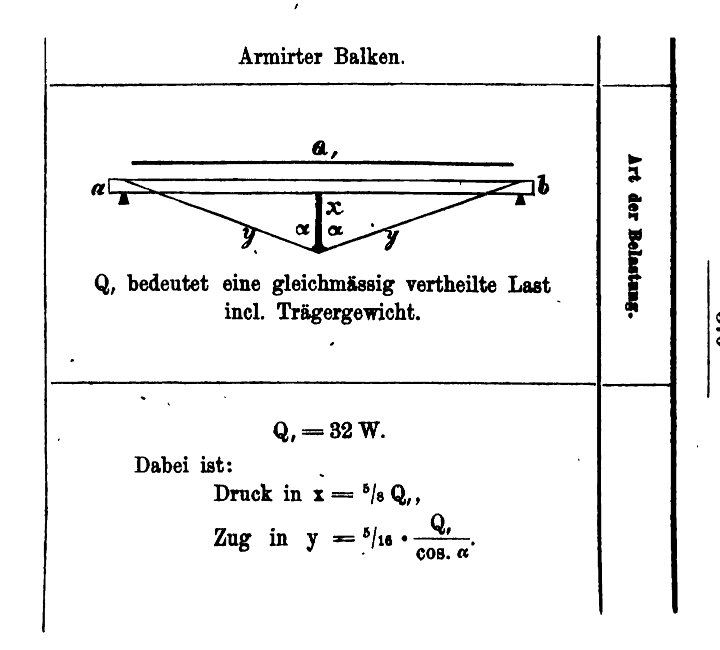
giltig wenn $\frac{Q}{Q_{,} + G} < \frac{C}{l_{,}}$,
Bruch zwischen Q und Mitte.

giltig wenn $\frac{Q}{Q_{,} + G} < \frac{C}{l_{,}}$,
Bruch zwischen Q und Mitte.

giltig wenn $\frac{Q}{Q_{,} + G} \overline{\gtrless} \frac{C}{l_{,}}$, Bruch bei Q.

giltig wenn $\frac{Q}{Q_{,} + G} \overline{\gtrless} \frac{C}{l_{,}}$, Bruch bei Q.

Art der Belastung.	
Armirter Balken.	



Q, bedeutet eine gleichmässig vertheilte Last incl. Trägergewicht.

$Q_{,} = 32$ W.

Dabei ist:

Druck in $x = {}^{5}/_{8}\, Q_{,}$,

Zug in $y = {}^{5}/_{16} \cdot \frac{Q_{,}}{\cos. \alpha}$.

Tragkraft in Pfunden.

Ist $Q_{\prime}$ gegeben, so nehme man für den horizontalen Balken a b:

bei den Hölzern ad a Seite 363 $Z = \frac{Q_{\prime} L}{38}$.

bei den Hölzern ad b Seite 363 $Z = \frac{Q_{\prime} L}{45}$.

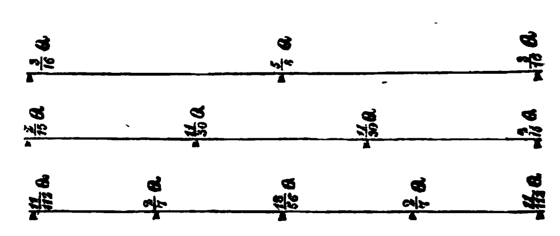
bei den Hölzern ad c Seite 363 $Z = \frac{Q_{\prime} L}{58}$.

bei Schmiedeeisen . . . . . $Z = \frac{Q_{\prime} L}{512}$.

bei Gusseisen . . . . $Z = \frac{Q_{\prime} L}{384}$.

x und y berechne man nach den Formeln der Druck- und Zugfestigkeit.

Auflager-Drucke.



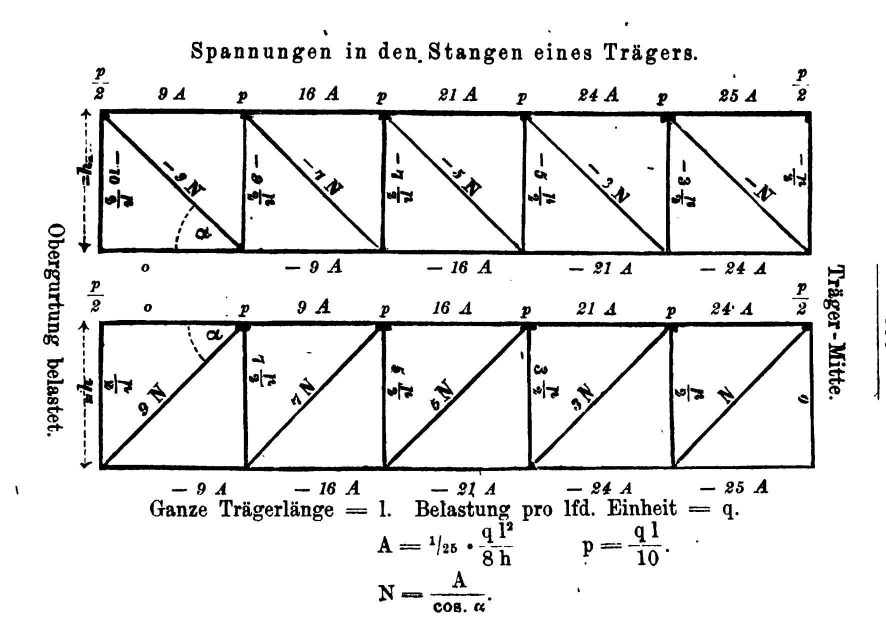
Die Auflager-Punkte haben gleiche Entfernung untereinander und liegen horizontal. Der Träger ist frei aufgelagert und incl. Eigengewicht gleichmässig mit Q belastet.

III^b. Konstruktion der Fachwerkträger.

Die nachfolgenden Figuren geben die bei gewöhnlicher Fachwerkskonstruktion in den Stangen des Trägers auftretenden Spannungen und Pressungen an.

Die Berechnung der Querschnittsdimensionen dieser Verbandstücke folgt nach I und II.

Spannungen in den Stangen eines Trägers.



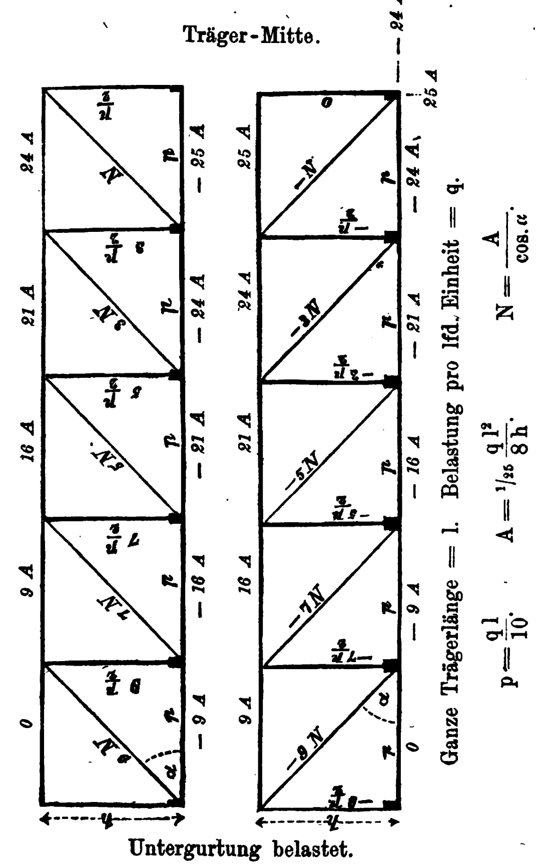
Ganze Trägerlänge = 1. Belastung pro lfd. Einheit = q.

$$A = {}^1/_{25} \cdot \frac{q\,l^2}{8\,h} \qquad p = \frac{q\,l}{10}.$$

$$N = \frac{A}{\cos.\alpha}.$$

Träger-Mitte.

Spannungen in den Stangen eines Trägers.

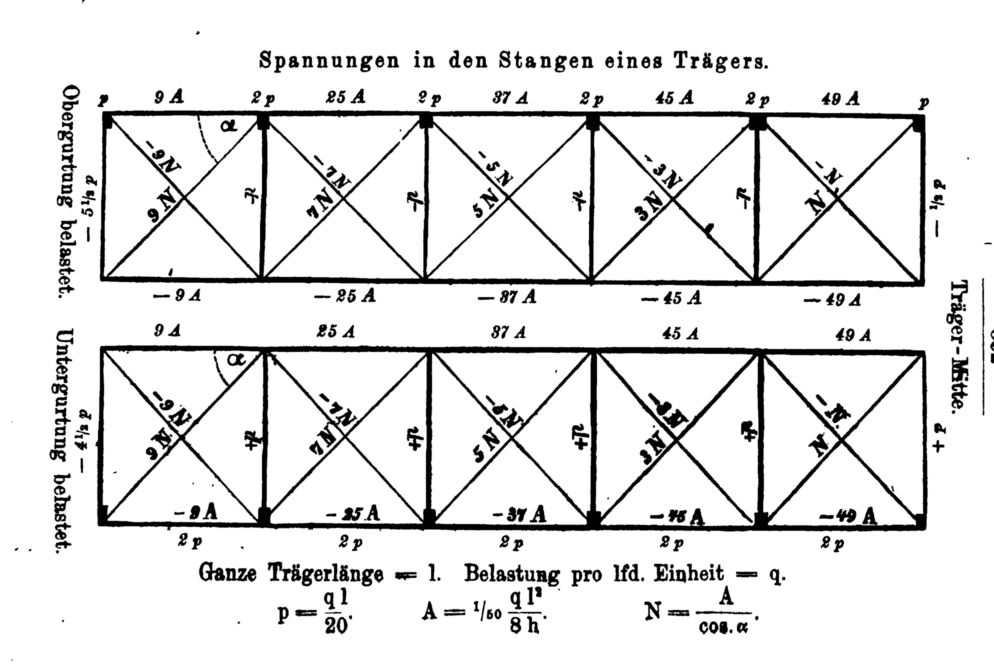


Untergurtung belastet.

Ganze Trägerlänge = 1. Belastung pro lfd. Einheit = q.

$$p = \frac{q\,l}{10}. \quad A = {}^1/_{25}\,\frac{q\,l^2}{8\,h}. \quad N = \frac{A}{\cos.\alpha}.$$

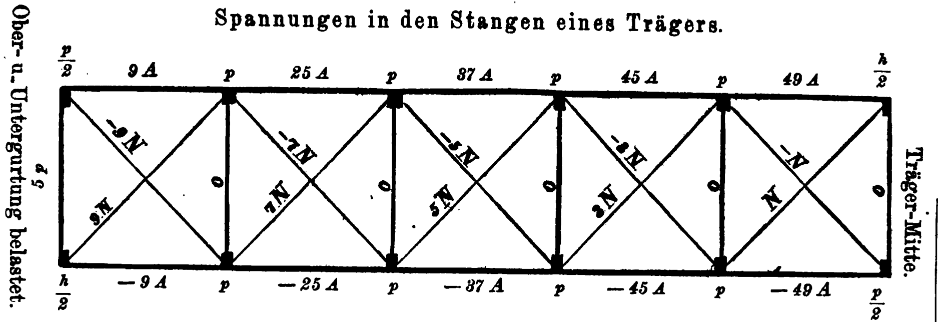
Spannungen in den Stangen eines Trägers.



Ganze Trägerlänge = 1. Belastung pro lfd. Einheit = q.

$p = \frac{q\,l}{20}$. $A = {}^1/_{50}\,\frac{q\,l^2}{8\,h}$. $N = \frac{A}{\cos.\alpha}$.

Spannungen in den Stangen eines Trägers.



Ober- u. Untergurtung belastet.

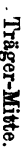
Ganze Trägerlänge = l,

Belastung pro lfd. Einheit = q,

$$p = \frac{q\,l}{20}.$$

$$A = {}^1/_{50}\,\frac{q\,l^2}{8\,h}. \qquad N = \frac{A}{\cos.\alpha}.$$

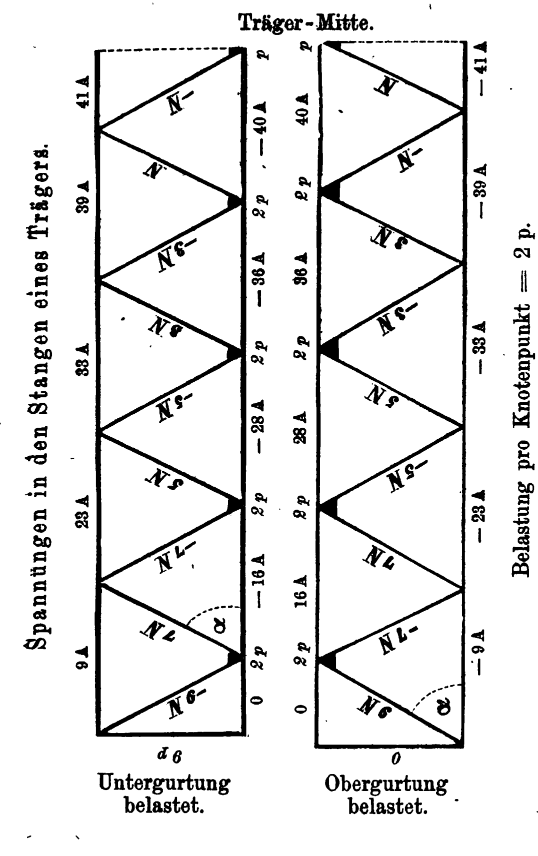
Spannungen in den Stangen eines Trägers.



Belastung pro Knotenpunkt = 2 p.

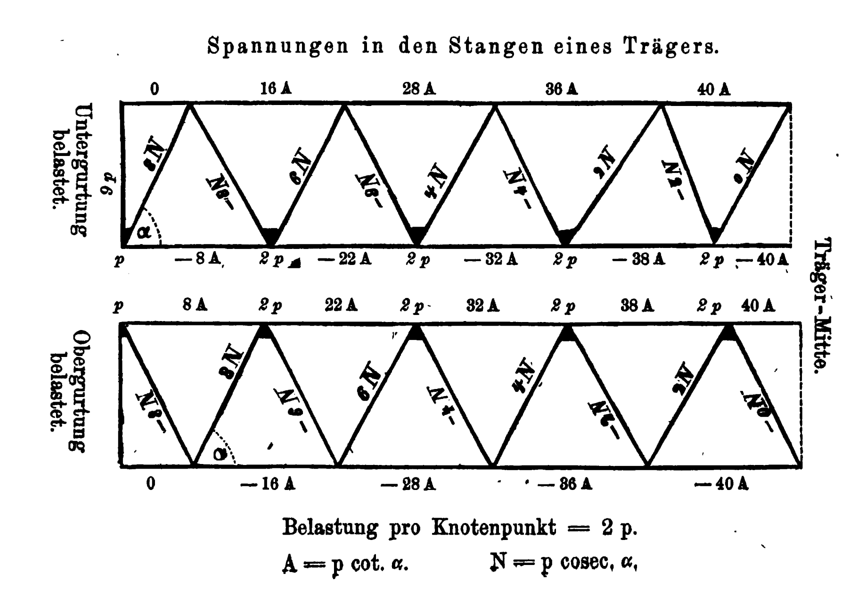
A = p cotang. α. N = p cosec. α.

Träger-Mitte.

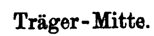


Untergurtung belastet.

Obergurtung belastet.



Spannungen in den Stangen eines Trägers.
0
16 A
28 A
36 A
40 A
p
— 8 A
2 p
— 22 A
2 p
— 32 A
2 p
— 38 A
2 p
— 40 A
p
8 A
2 p
22 A
2 p
32 A
2 p
38 A
2 p
40 A
0
— 16 A
— 28 A
— 36 A
— 40 A
Untergurtung belastet.
Obergurtung belastet.
Träger-Mitte.
Belastung pro Knotenpunkt = 2 p.
A = p cot. α.
N = p cosec. α.



Träger-Mitte.

Spannungen in den Stangen eines Trägers.

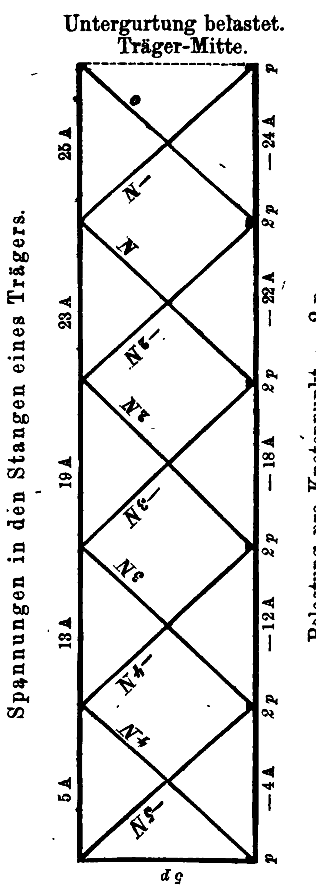
Untergurtung belastet.

Obergurtung belastet.

Belastung pro Knotenpunkt = 2 p.

A = p cot. α. N = p cosec. α.

Untergurtung belastet.
Träger-Mitte.



Belastung pro Knotenpunkt = 2 p

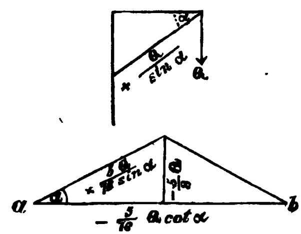
$A = p \cot. \alpha.$

$N = p \operatorname{cosec}. \alpha.$

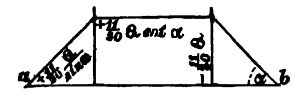
IV. Konstruktion der Hänge- und Sprengwerke, der eisernen und hölzernen Dachverbände.

Hänge- und Sprengwerke.

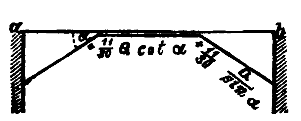
+ bedeutet Druckspannung,
— bedeutet Zugspannung.



Q bedeutet die gleichmässig auf a b vertheilte Belastung.

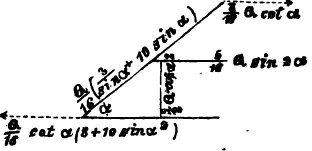


Q bedeutet die gleichmässig über a b vertheilte Belastung.



Q bedeutet die über a b gleichmässig vertheilte Last.

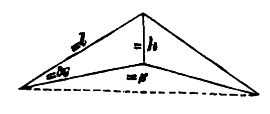
Halber Dachstuhl.

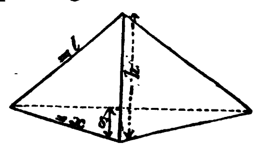


Q bedeutet die Belastung des halben Binders.

Dächer von Eisen, resp. Holz und Eisen.

Q Belastung eines Sparrens,
\+ bedeutet Druckspannung,
— bedeutet Zugspannung.





Spannung in:

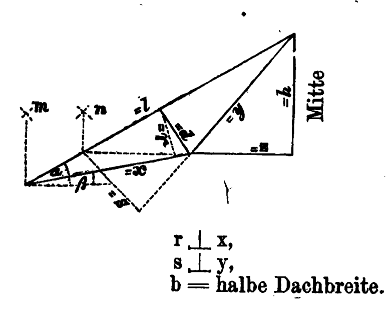
$$x = -\frac{Q\,x}{2\,h},$$

$$l = +\frac{Q\,l}{2\,h},$$

$$h = \pm\frac{Q\,s}{h}.$$

Für $s = 0$, ist statt h ein Hängeeisen von 1,5 Ctm. Stärke anzuwenden.

Das System ist anwendbar bis zu 8 Meter Spannweite.



$r \perp x$,
$s \perp y$,
b = halbe Dachbreite.

Spannung in:

$$x = -\frac{13}{32}\frac{Q\,b}{r} = \Delta,$$

$$y = -\,{}^1/_{16}\,\frac{Q\,(13\,m + 10\,n)}{s},$$

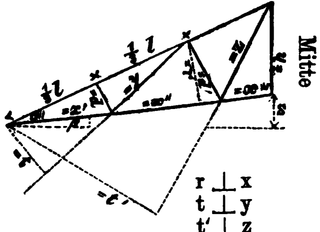
$$z = -\,{}^1/_2\,\frac{Q\,b}{h},$$

$$d = +\,{}^5/_8\,\frac{Q\,b}{l},$$

$$\text{unten in } l = +\,\Delta\,\frac{\cos.\,\beta}{\cos.\,\alpha}.$$

Hängeeisen h, falls erforderlich 1,5 Ctm. stark.

Das System ist anwendbar bis 15 Meter Spannweite.



Spannung in:

$$x' = -\,{}^{26}/_{45} \cdot \frac{Q\,b}{r} = \Delta,$$

$$x'' = -\,{}^{41}/_{90} \cdot \frac{Q\,b}{r},$$

$$x''' = -\,{}^{1}/_{3} \cdot \frac{Q\,b}{r},$$

$$y = -\,{}^{11}/_{90} \cdot \frac{Q\,b}{t},$$

$$z = -\,{}^{11}/_{30} \cdot \frac{Q\,b}{t'},$$

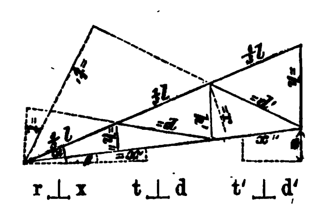
$$d = +\,{}^{11}/_{30} \cdot \frac{Q\,b}{l}.$$

$$d' = +\,{}^{11}/_{20} \cdot \frac{Q\,b}{l},$$

$$h = -\,\frac{O\,s}{h},$$

$$\text{unten in } l = +\,\Delta\,\frac{\cos.\beta}{\cos.\alpha}.$$

Bis 20 Meter Spannweite brauchbar.



Spannung in:

$$x' = -\,{}^{26}/_{45} \cdot \frac{Q\,b}{r} = \Delta,$$

$$x'' = -\,{}^{41}/_{90} \cdot \frac{Q\,b}{r},$$

h'' als Hängeeisen = 1,5 Ctm.,

$$h' = -\,{}^{11}/_{60} \cdot Q,$$

$$h = -\,{}^{1}/_{15} \cdot \frac{Q\,(11\,h + 15\,s)}{h},$$

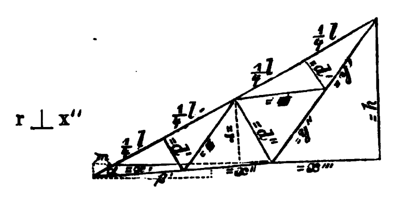
$$d = +\,{}^{11}/_{90} \cdot \frac{Q\,b}{t},$$

$$d' = +\,{}^{11}/_{30} \cdot \frac{Q\,b}{t'},$$

$$\text{unten in } 1 = +\,\Delta \cdot \frac{\cos.\beta}{\cos.\alpha}.$$

Das System ist bis 20 Meter Spannweite anwendbar.

$r \perp x''$



Spannung in:

$$x' = -0{,}450 \cdot \frac{Q\,b}{r} = \varDelta,$$

$$x'' = -0{,}379 \cdot \frac{Q\,b}{r},$$

$$x''' = -\frac{Q\,b}{2\,h},$$

$$z = -0{,}071 \cdot \frac{Q\,b}{r},$$

$$y' = -\frac{Q\,b\,(0{,}2\,b + 0{,}05\,m)}{r\,(b - m)},$$

$$y'' = -\frac{Q\,b\,(0{,}129\,b + 0{,}121\,m)}{r\,(b - m)},$$

$$d' = +0{,}285 \cdot \frac{Q\,b}{l}.$$

$$d'' = +0{,}514 \cdot \frac{Q\,b}{l},$$

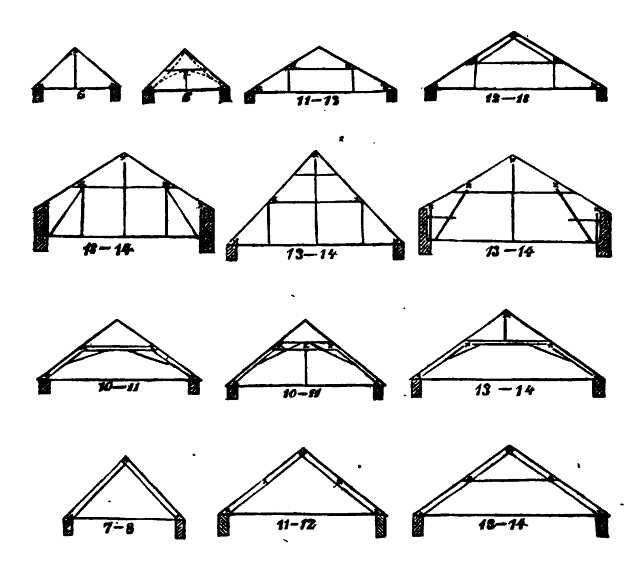
unten in $l = + \varDelta \cdot \frac{\cos.\,\beta}{\cos.\,\alpha}.$

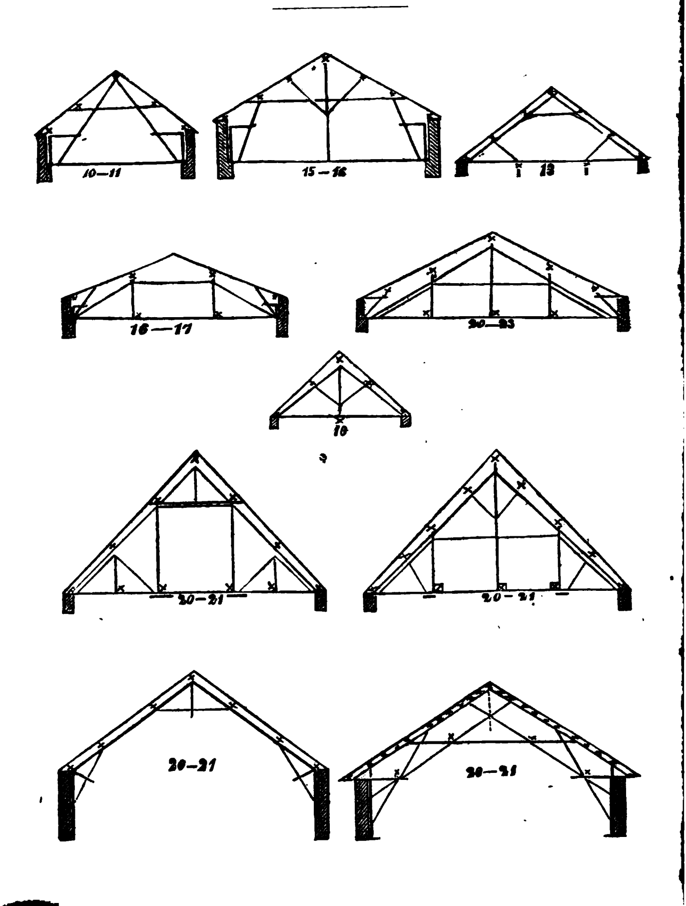
Hängeeisen $h = 1{,}5 - 2$ Ctm.

Anwendbar bis 25 Meter Spannweite.

Die gezogenen Stangen berechne man mit 1600 Pfd. pro □Ctm. nach den Regeln für gezogene Verbandstücke, die gedrückten dagegen als Streben.

Hölzerne Dächer konstruire man für verschiedene Spannweiten nach dem beigefügten Schema, worin die Spannweiten im Metermaass angegeben sind.




10—11
15 — 16
13
16—17
20—23
10
20—21
20—21
20—21
20—21

V. Konstruktion der Mauern und Gewölbe.

Mauerwerk.

1. Zulässige Belastung:
   in Fundamenten . . 100—150000 Pfd. pro □Met.
   in steigendem Mauerwerk 30—60000 „ „ „
2. Druck des Gebäudes auf den Baugrund:
   pro 1 Cub.-Met. Mauerwerk 3200 Pfd.
   „ 1 □Met. Decke . . . 1000 „
   „ 1 „ Gewölbe . . 1500 „
3. Mauerstärken.
   Bedeutet:
   t die Gebäudetiefe,
   h_1 h_2 h_3 die Stockwerkshöhen von oben gerechnet.
   s_1 s_2 s_3 die entsprechenden Mauerstärken,

so ist:

$$s_1 = \frac{t}{40} + \frac{h_1}{25},$$

$$s_2 = \frac{t}{40} + \frac{h_1 + h_2}{25},$$

$$s_3 = \frac{t}{40} + \frac{h_1 + h_2 + h_3}{25}$$

u. s. w.

Freistehende Mauern erhalten mindestens $^1/_{12}$ bis $^1/_1$ ihrer Höhe zur Stärke.

4. Futtermauern.

Bedeutet: h die Höhe der Mauer,
b „ obere Dicke,
B „ untere Dicke,
α „ den Neigungs-∢ der Böschung,

so hat man:

für tang. α =	$^1/_5$	$^1/_6$	$^1/_8$	$^1/_{10}$	$^1/_{12}$	$^1/_{20}$	0
$\frac{B}{h}$ =	0,308	0,301	0,294	0,291	0,289	0,286	0,285
$\frac{b}{h}$ =	0,108	0,135	0,169	0,191	0,206	0,236	0,285

Nach einer praktischen Regel gibt man einer Futtermauer oben 0,5 bis 1 Meter, unten $^1/_3$ der Höhe zur Stärke.

Bei Erschütterungen gibt man den Futtermauern unten eine grössere Stärke, man pflegt die angegebene untere Stärke dann in der Mitte zu nehmen.

5. Gewölbestärken (allgemeine Regeln).

Bezeichnet:
s die Gewölbestärke im Schlussstein in Metern,
l die Spannweite in Metern,

so nehme man:

a) Bei Anwendung von Ziegeln:

α. Für halbkreisförmige Gewölbe:

wenn sie im Scheitel horizontal abgeglichen sind, $s = {}^1/_{48}\, l$,

wenn sie bis zur halben Höhe hintermauert und im Rücken parallel der Leibung abgeglichen sind, $s = {}^1/_{36}\, l$,

wenn sie bis zur halben Höhe hintermauert und von hier bis zum Scheitel verjüngt abgeglichen sind, $s = {}^1/_{48}\, l$ (am Widerl. $s = {}^1/_{32}\, l$).

β. Für flache Gewölbe: $s = 0{,}0694\ r + 0{,}314$, wenn r den Krümmungshalbmesser am Scheitel in Metern bezeichnet.

b) Bei Anwendung von Bruchsteinen nehme man 1,6 der Gewölbestärken aus Ziegelsteinen.

c) Bei Anwendung von Schnittsteinen, unter der Voraussetzung, dass das Gewölbe am Widerlager doppelt so stark als am Schlussstein ist:

α. Bei starken Brückengewölben $s = 0{,}314 + \frac{1}{24}\ l$.
β. Bei mittelstarken Gewölben $s = 0{,}157 + \frac{1}{48}\ l$.
γ. Bei unbelasteten Gewölben $s = 0{,}078 + \frac{1}{96}\ l$.

6. Widerlagsstärken.

Als ungefähren Anhalt kann man die Widerlagsstärke annehmen:

bei halbkreisförmigen Bögen	$\frac{1}{5} - \frac{1}{5\frac{1}{2}}$	der lichten Weite.
bei halbkreisförmigen Gewölben . .	$\frac{1}{5\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}$	
bei flachen Bögen	$\frac{1}{3\frac{1}{2}} - \frac{1}{4\frac{1}{2}}$	
bei flachen Gewölben	$\frac{1}{3\frac{1}{2}} - \frac{1}{5}$	
bei scheitrechten Bögen und Gewölben	$\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$	

7. Das Tonnengewölbe.

Schlusssteinstärke bei 6 Meter Spannweite und darunter ½ Stein, darüber 1 Stein. Alle 2—3 Meter ist ein Gurtbogen anzulegen.
Widerlagsstärke wie ad 6.

8. Das Kappengewölbe.

Breite der Gurtbögen 1½ bis 2 Steine.
Schlusssteinstärke derselben bei ¼ Pfeilhöhe:

bis 2 Meter Spannweite	1	bis	$1^1/_2$	Stein,
von 2 „ 3,5 „	„	$1^1/_2$	„	2	„
„ 3,5 „ 6,0 „	„	2	„	$2^1/_2$	„
„ 6,0 „ 9,0 „	„	$2^1/_2$	„	3	„

Gurtbögen, die ausser den Kappen keine weitere Belastung zu tragen haben, können $^1/_8$ der Spannweite zum Pfeil erhalten.

Schlusssteinstärke der Kappen bei $^1/_8$ bis $^1/_{12}$ Pfeilhöhe:

bis 4 Meter . . . $^1/_2$ Stein,
„ 5,5 „ . . . 1 „

Widerlagsstärke für die Gurtbögen = $^1/_3$ — $^1/_5$ der Spannweite, je nach der Belastung. Widerlagsstärke für die Kappen = $^1/_4$ — $^1/_5$ der Spannweite, jedoch nicht unter $1^1/_2$ Stein.

8. Das Kreuzgewölbe.

Bei einer Spannweite bis zu 7 Meter:
Gewölbstärke der Kappen = $^1/_2$ Stein,
„ der Grate = 1 „

Bei einer Spannweite von 7—10 Meter:
Gewölbstärke im Scheitel . . $^1/_2$ Stein
„ am Kämpfer . . 1 „
Stärke der Grate im Scheitel . 1 „
„ „ „ am Kämpfer $1^1/_2$ „

Bei einer Spannweite von 10—20 Meter:
Gewölbstärke im Scheitel . . 1 Stein,
„ am Kämpfer . . $1^1/_2$ „
Stärke der Grate im Scheitel . $1^1/_2$ „
„ „ „ am Kämpfer 2 „
Stich der Kappen $^1/_{20}$ bis $^1/_{30}$ ihrer Länge.

Die Widerlagsstärke beträgt:
bei halbkreisförmigen Gewölben $^1/_4$ — $^1/_6$ } der Diagonale.
bei spitzbogenförmigen „ $^1/_5$ — $^1/_7$ }

Bei Widerlagern, die höher als 3 Meter sind, ist die Stärke um $^1/_8$ — $^1/_{10}$ der Höhe zu vergrössern.

9. Das Klostergewölbe.

Gewölbstärke

bis 4 Meter Spannweite = 1/2 Stein,
„ 4—6 „ „ = 1 „

Widerlagsstärke, bei rechtwinkeliger unregelmässiger Grundform wie ad 7. Bei regelmässigen Polygonen 2/3 der Werthe ad 7.

10. Das Böhmische Kappen- und Spiegelgewölbe.

Pfeilhöhe = 1/10 der Diagonale,
Spannweite bis 5,5 Meter,
Gewölbstärke = 1/2 Stein,
Widerlagsstärke = 1/4—1/5 der Spannweite, jedoch nicht unter 2 1/2 Stein.

11. Kuppelgewölbe.

Gewölbstärke:	im Schluss	am Kämpfer
bis 4 Meter Spannweite	1/2 Stein	1/2 Stein
von 4 „ 6 „ „	1 „	1 „
„ 6 „ 8 „ „	1 „	1 1/2 „
„ 8 „ 10 „ „	1 1/2 „	2 „

Widerlager 1/6—1/8 vom Durchmesser.

12. Unterwölbung der Treppen.

a) Tonnen- oder Kappengewölbe:
Pfeilhöhe = 1/8—1/12 der Spannweite;
Gewölbstärke im Scheitel bei 2 Meter Spannweite = 1/2 Stein, darüber 1 Stein;
Widerlager = 1/3 der Spannweite und nicht unter 1 1/2 Stein.

b) Kreuzgewölbe:
Stärke der Kappen = 1/2 Stein;
„ der Grate bis 2 Meter = 1 Stein, darüber 1 1/2 Stein;
Widerlagsstärke = 1/4 — 1/5 der Diagonalhöhe.
Widerlage sind wie ad 8 zu verstärken.

13. Ausrüstung der Gewölbe.

Bögen und Gewölbe in Kalkmörtel nach 2—3 Wochen, in Cementmörtel nach 3—4 Tagen.

Die Senkung s nach dem Ausrüsten beträgt, wenn W die Spannweite und h die Pfeilhöhe bedeutet,

bei hängendem Lehrgerüste:

$$s = 0{,}01 \text{ bis } 0{,}02\,(W - h);$$

bei stehendem Lehrgerüste:

$$s = 0{,}005 \text{ bis } 0{,}01\,(W - h).$$

VI. Konstruktion der einfachen Maschinentheile, der hydraulischen Motoren, Dampfmaschinen, Pumpen, Gebläse und Dampfhämmer.

A. Torsions-Festigkeit.

Es bezeichne:

P die auf Torsion wirkende Kraft in Kilogr.,
R den Hebelarm, an dem P wirkt, in Metern,
r „ „ „ „ „ „ in Centim.,
N die Anzahl der zu übertragenden Pferdekräfte,
n die Anzahl der Umdrehungen pro Minute,
d den Durchmesser der auf Torsion beanspruchten Welle in Centim.,
a und b die Seiten des Querschnittes eines auf Torsion in Anspruch genommenen Körpers mit rechteckigem Querschnitt in Centim.,
k die zulässige Belastung für Maschinenkonstruktionen,

so hat man bei einfacher Sicherheit (halber Elasticitätsgrenze)

für den kreisförmigen Querschnitt:

$$P\,r = {}^{1}/_{16}\,\pi\,k\,d^3 = {}^{1}/_{5}\,k\,d^3,$$

für den rechteckigen Querschnitt:

$$P\,r = {}^{1}/_{6}\,k\,a\,b\sqrt{a^2 + b^2};$$

und ist: $$P\,R = 716\,\frac{N}{n}\ \text{Kilogr.-Meter.}$$

Beim kreisförmigen Querschnitt ergibt sich bei s-facher Sicherheit

für Schmiedeeisen:

$$d = 0.89\sqrt[3]{s\,P\,R} = 7{,}93\sqrt[3]{s\,\frac{N}{n}}\ \text{Centim.;}$$

für Gusseisen:

$$d = 1{,}12\sqrt[3]{s\,P\,R} = 10{,}02\sqrt[3]{s\,\frac{N}{n}}\ \text{Centim.}$$

Einfache Sicherheit wendet man in der Praxis nur selten an.

2-, 3- und 4fache Sicherheit für Wellen, die durch Menschen- oder Thierkräfte bewegt werden.

4-, 5- und 6fache Sicherheit für Wellen, die durch Elementarkräfte bewegt werden.

6-, 7- und 8fache Sicherheit für Wellen, welche bedeutenden Stössen ausgesetzt sind, oder bei denen das Torsions-Moment in Folge von Schwungmassen bedeutend anwachsen kann.

B. Einfache Maschinentheile.

Schrauben.

Whitworth'sche Schrauben-Skala für Befestigungsschrauben mit dreiseitigem Gewinde.

Durchmesser. Zoll engl.	Centimeter.	Kerndurchm. Zoll engl.	Anzahl der Gewinde auf eine Länge gleich dem Drchm.	Anzahl der Gewinde auf 1 Zoll engl.	Durchmesser. Zoll engl.	Centimeter.	Kerndurchm. Zoll engl.	Anzahl der Gewinde auf eine Länge gleich dem Drchm.	Anzahl der Gewinde auf 1 Zoll engl.
$^1/_4$	0,635	0,15	5	20	$2^1/_4$	5,715	1,75	9	4
$^5/_{16}$	0,794	0,20	$5^5/_8$	18	$2^1/_2$	6,350	2,00	10	4
$^3/_8$	0,952	0,25	6	16	$2^3/_4$	6,985	2,18	$9^5/_8$	$3^1/_2$
$^7/_{16}$	1,111	0,29	$6^1/_8$	14	3	7,620	2,42	$10^1/_2$	$3^1/_2$
$^1/_2$	1,270	0,33	6	12	$3^1/_4$	8,255	2,63	$10^9/_{16}$	$3^1/_4$
$^5/_8$	1,587	0,44	$6^7/_8$	11	$3^1/_2$	8,890	2,88	$11^3/_8$	$3^1/_4$
$^3/_4$	1,905	0,55	$7^1/_2$	10	$3^3/_4$	9,525	3,08	$11^1/_4$	3
$^7/_8$	2,222	0,65	$7^7/_8$	9	4	10,16	3,33	12	3
1	2,540	0,75	8	8	$4^1/_4$	10,79	3,55	$12^7/_{32}$	$2^7/_8$
$1^1/_8$	2,857	0,84	$7^7/_8$	7	$4^1/_2$	11,43	3,80	$12^{15}/_{16}$	$2^7/_8$
$1^1/_4$	3,175	0,96	$8^3/_4$	7	$4^3/_4$	12,06	4,03	$13^1/_{16}$	$2^3/_4$
$1^3/_8$	3,492	1,04	$8^1/_4$	6	5	12,70	4,27	$13^3/_4$	$2^3/_4$
$1^1/_2$	3,810	1,17	9	6	$5^1/_4$	13,33	4,58	$13^{26}/_{32}$	$2^5/_8$
$1^5/_8$	4,127	1,20	$8^1/_8$	5	$5^1/_2$	13,97	4,73	$14^7/_{16}$	$2^5/_8$
$1^3/_4$	4,445	1,35	$8^3/_4$	5	$5^3/_4$	14,60	4,95	$14^3/_8$	$2^1/_2$
$1^7/_8$	4,762	1,44	$8^7/_{16}$	$4^1/_2$	6	15,24	5,20	15	$2^1/_2$
2	5,080	1,66	9	$4^1/_2$					

Für Schrauben mit flachgängigem Gewinde nehme man die Anzahl der Gewinde halb so gross als für Schrauben mit dreiseitigem Gewinde.

Schrauben-Skala für Schrauben zu mechanischen und optischen Instrumenten.

Durchmesser der Schrauben. Millim.	Anzahl der Gänge auf 1 Centim.	
	für grobes Gewinde.	für feines Gewinde.
4	12	24
5	10	20
6	9	18
8	8	16
10	6	12

Die zulässige Belastung eines Schraubenbolzens vom Durchmesser d betrage:

$$P = 220\ d^2 \text{ Kilogr. (wenn d in Centim.)}.$$

Der zum Anziehen einer Schraubenmutter an der Peripherie des Schraubenbolzens wirksame Druck ist circa halb so gross als die hervorgebrachte Spannung im Schraubenbolzen.

Zapfenlager.

Für gewöhnliche Zapfenlager sind folgende Verhältnisse passend:

Durchmesser des Zapfens = d; Länge desselben = $1^1/_2$ d;
Metallstärke der Pfannen = 0,1 d, im Min. = 0,3 Ctm.;
Höhe des Mittelpunktes über der Sohle = $^5/_4$ d;
Stärke des Lagerdeckels = $^3/_4$ d bis d.

Anzahl der Deckelschrauben:
bis 10 Centim. Durchm. = 2 Stück à $^1/_3$ d;
darüber = 4 Stück à $^1/_4$ d.

Entfernung der Deckelschrauben von M. zu M. $1^5/_6$ d bis 2 d.

Wellen, Zapfen und Naben.

Wellen, die auf Torsion in Anspruch genommen werden, bestimme man nach A.

Tabelle über die übliche Länge von Zapfen mit dem Durchmesser d.

Anzahl der Umdrehungen:	bis 100.	100—250.	250—500.	über 500.
Länge der Zapfen:	$1^1/_2$ d	$1^1/_2$ d—2 d	2 d—3 d	3 d

Tabelle über die zulässige Belastung von Zapfen, welche auf Abbrechen in Anspruch genommen werden, pro Quadr.-Centim. Querschnitt.

Material.	Bei einer Länge von:			
	$1^1/_2$ d Kilogr. pro Qu.-Ctm.	2 d Kilogr. pro Qu.-Ctm.	$2^1/_2$ d Kilogr. pro Qu.-Ctm.	3 d Kilogr. pro Qu.-Ctm.
Gussstahl . .	110	82	66	55
Schmiedeeisen	61	46	37	30
Gusseisen . .	43	32	26	21

Kann man die Belastung des Zapfens als gleichmässig vertheilt annehmen, wie man Solches bei Kurbelwarzen anzunehmen pflegt, so sind die Angaben über zulässige Belastung in der obigen Tabelle zu verdoppeln.

Die Tragfähigkeit der Zapfen von gleichem Durchmesser verhält sich umgekehrt wie deren Länge.

Stützzapfen gebe man, wenn die eine der reibenden Flächen aus Bronze besteht, $^3/_4$, wenn die reibenden Flächen Stahl sind, $^1/_2$, von dem Durchmesser eines schmiedeeisernen Zapfens, der durch dieselbe Last auf Bruch in Anspruch genommen wird, und dessen Länge der Anzahl der Umdrehungen entspricht.

Naben gibt man gewöhnlich folgende Verhältnisse:

a) Durchmesser der Nabe, wenn Nabe und Welle aus demselben Material sind = $1^3/_4$ d bis 2 d.
Wenn die Welle aus Schmiedeeisen, die Nabe aus Gusseisen = 2 d bis $2^1/_2$ d.

b) Länge der Nabe gewöhnlich = $1^1/_4$ d bis $1^1/_2$ d.
Für Naben, die einer besonders soliden Befestigung bedürfen, wie Schwungradnaben = 2 d bis 3 d.

Naben, welche nur einen Theil der Torsionskraft der Welle übertragen, können entsprechend schwächer werden.

Federn und Keile für passend gebohrte Naben:
Breite = $^1/_5$ bis $^1/_3$ d, Stärke = $^5/_8$ der Breite.

Riemscheiben und Bremsen.

Bezeichnet
P den auf den Umfang der Riemscheibe oder Bremsscheibe reducirten Druck,
T die grössere, t die kleinere Spannung des Riemens,
so ist: $T = P + t;\ t = T - P.$

Einen 4,4 Millim. dicken Riemen kann man pro Centim. Breite mit 11,5 Kilogr. belasten.
Unter gewöhnlichen Verhältnissen pflegt man pro Centim. Riemenbreite 5 bis 6 Kilogr. zu übertragen.

Zahnräder.

1) Verhältnisse der Zähne:

Bezeichnet s die Zahnstärke auf dem Theilkreise gemessen, so pflegt man folgende Verhältnisse anzunehmen:
Theilung des Zahnes = 2,1 s.
Höhe resp. Länge des Zahnes = 1,2 s, im Maximum = 1,5 s.
Verhältniss zwischen Höhe des Zahnkopfes und Zahnwurzel = $^5/_7$ s.

Breite des Zahnes: Gewöhnlich 4 s bis 5 s.
Bei starkem Gebrauch = 5 s bis 6 s.
Bei sehr schnell gehenden Rädern, zur Vermeidung der Abnutzung = 6 s bis 8 s.

Für die Theilung wählt man mit Vortheil einfache Bruchtheile oder Vielfache, des πfachen der Maasseinheit.

Der Durchmesser des Rades ist alsdann bei einer Theilung $n\,\pi$ und bei z Zähnen:

$$D = n\,z.$$

2) Stärke der Zähne:

a) Gusseiserne Zahnräder können pro Qu.-Centim. Anhaftungsfläche eines Zahnes eine Kraft übertragen von:
73 Kilogr. pro Qu.-Centim. bei ruhigem und gleichförmigem Gange;
36 Kilogr. pro Qu.-Centim. bei unruhigem Gange;
18 Kilogr. pro Qu.-Centim. bei ungleichförmigem mit Stössen verbundenem Gange, und wenn die zu übertragende Kraft in Folge von Schwungmassen bedeutend anwachsen kann.

b) Zahnräder mit hölzernen Zähnen belastet man mit 15 bis 18 Kilogr. pro Qu.-Centim.

c) Bezeichnet:
d den auf Torsion berechneten Wellendurchmesser in Centim.,
b die Breite des Zahnes in Centim.,
r den Theilungshalbmesser in Centim.,
so nehme man die Anhaftungsfläche eines jeden Zahnes:

Für gusseiserne Räder auf schmiedeeisernen Wellen:

$$s\,b = \frac{d^3}{r} \text{ Qu.-Centim.};$$

für gusseiserne Räder auf gusseisernen Wellen:

$$s\,b = 0{,}7\,\frac{d^3}{r} \text{ Qu.-Centim.}$$

3) Die Stärke des Radkranzes wähle man:
bei gusseisernen Rädern = $^2/_8$ bis $^9/_8$ der Zahnstärke;
bei Rädern mit hölzernen Kämmen = $^1/_1$ bis $^2/_1$ der Zahnstärke.

Schneckenräder.

Bezeichnet
P die an der Schnecke am Hebelsarm a wirkende Kraft,
Q die am Schneckenrade am Hebelsarm b wirkende Kraft,
n die Anzahl der Zähne des Schneckenrades,
so hat man bei einfachem Gewinde theoretisch:

$$P\,a = \frac{Q\,b}{n}.$$

Wegen der Reibung kann man unter gewöhnlichen Verhältnissen rechnen:

$$P\,a = \frac{3\,Q\,b}{n}.$$

Kurbeln.

Handkurbeln gibt man folgende Verhältnisse:
Radius der Kurbel = 26 bis 42 Centim.;
Länge des Kurbelgriffs für 1 Arbeiter = 26 bis 32 Centim.;
Länge des Kurbelgriffs für 2 Arbeiter = 47 bis 52 Centim.;
Durchmesser des Kurbelgriffs = 4 bis 5 Centim.;
Höhe der Kurbelwelle über Fussboden bis 1,1 Met.

Ein Mann arbeitet an einer Kurbel mit 20 bis 30 Pfund bei 1 bis 0,6 Meter Geschwindigkeit pro Sekunde.

Lenkerstangen.

Länge derselben im Minimum = dem 3fachen, gewöhnlich = dem 5fachen, auch wohl 6fachen Kurbelhalbmesser.

Querschnitt derselben, bei Anspruchnahme auf rückwirkende Festigkeit nach II.

Balancier.

Länge eines Balancierarmes mindestens = dem $1\frac{1}{2}$-fachen Hube. Höhe in der Mitte gewöhnlich = $\frac{1}{8}$ bis $\frac{1}{6}$ der Länge.

Windetrommel, Seile und Ketten.

1) Verhältnisse der Windetrommeln.

Bezeichnet d den Durchmesser des Seiles oder der Kette, so wähle man den Durchmesser der Trommel mindestens:

a) Für Hanfseile = (6 bis 8) d, bei starkem Gebrauch, wie bei Grubenbeförderung = (30 bis 50) d.
b) Für Drahtseile = (30 bis 40) d,
bei starkem Gebrauch = (100 bis 150) d.
c) Für Ketten = (24 bis 30) d.

2) Hanfseile.

a) Die äusserste Tragfähigkeit:
für ungetheerte Seile 877 Kilogr. pro Qu.-Centim.;
für getheerte Seile . 804 „ „ „
b) Die zulässige Belastung:
für Flaschenzugseile 110 Kilogr. pro Qu.-Centim.;
für Kabelseile . . . 132 „ „ „
für Förderseile . . . 37 „ „ „

3) Drahtseile.

Zulässige Belastung:
für Förderseile durchschnittlich 183 Kilogr. pro Qu.-Centim.;
für Kabelseile durchschnittlich 365 Kilogr. pro Qu.-Centim.

Allgemeine Regeln für Drahtseiltransmissionen.

1) Durchmesser der Seilscheiben = 150- bis 200-fache Seildicke.
2) Umfangsgeschwindigkeit der Seilscheiben = 13 bis 23 Meter.

3) Die Anspannung im treibenden Seile rechne man gleich dem doppelten zu überwindenden Widerstande und gleich der doppelten Anspannung im getriebenen Seilende.

4) Durchsenkung:
im treibenden Seile bis ca. ½ Meter pro 33 Meter Entfernung;
im getriebenen Seile bis ca. 1 Meter pro 33 Meter Entfernung.

5) Die Minimal-Entfernung der Seilrollen-Axen soll nicht unter 8 Meter betragen.

Schwungräder.

1) Umfangsgeschwindigkeit und Spannung im Schwungringe,

Es bezeichne:

v die Umfangsgeschwindigkeit eines Schwungrades in Metern pro Sek.,
P die im Schwungringe pro Qu.-Meter Querschnitt hervorgerufene Spannung in Kilogr.,
p die im Schwungringe pro Qu.-Centim. Querschnitt hervorgerufene Spannung in Kilogr.,
γ das Gewicht eines Cub.-Meter des betreffenden Materials in Kilogr.,
g die Endgeschwindigkeit eines freifallenden Körpers nach der ersten Sek. in Metern,

dann hat man:

$$P = \gamma \frac{v^2}{g}.$$

Für gusseiserne Schwungräder:

$$P = 7250 \frac{v^2}{g} \text{ Kilogr. pro Qu.-Meter,}$$

$$p = 0{,}074\, v^2 \text{ Kilogr. pro Qu.-Centim.}$$

Man pflegt die Umfangsgeschwindigkeit der Schwungräder nicht über 31 Meter pro Sek. anzunehmen.

2) Der Durchmesser

der Schwungräder ist um so vortheilhafter, je grösser er ist.

Im Minimum sei derselbe = dem 3—4fachen Kolbenhub, im Maximum so gross, dass die Maximal-Umfangsgeschwindigkeit weniger als 34 Meter beträgt.

3) Gewicht des Schwungrades.

Bezeichnet

N die Grösse der Maschine in Pferdekräften,
n die Anzahl der Umdrehungen pro Min.,
v die Umfangsgeschwindigkeit des Schwungrades in Metern pro Sek.,

so hat man das Gewicht des Schwungrades:

$$G = \alpha\, 50 \frac{N}{n\, v^2} \text{ Kilogr.}$$

Der Werth des Koëffizienten α ist von der Konstruktion und Wirkungsweise der Dampfmaschinen, sowie von der Art der zu betreibenden Maschine abhängig.

Für doppelt wirkende Dampfmaschinen mit 1 Cylinder wählt man:

a) Wenn die zu betreibenden Maschinen keine grosse Gleichförmigkeit in der Bewegung erfordern und einen ziemlich gleichmässigen Widerstand äussern, wie Mahlmühlen, Pumpen etc.:

$$\alpha = 5000.$$

Erfolgt der Betrieb aber mittelst Zahnräder, so nehme man mindestens:

$$\alpha = 10000.$$

b) Wenn die zu betreibenden Maschinen sehr grosse Gleichförmigkeit erfordern, oder mit sehr veränderlichem Widerstande arbeiten:

$$\alpha = 30000.$$

Die letzte Angabe passt gut für Walzenzugmaschinen.

Für Schwungräder der Zwillingsmaschinen genügt unter sonst gleichen Verhältnissen $^1/_5$ bis $^1/_{10}$ des Gewichtes der Schwungräder für Maschinen mit 1 Cylinder, wenn nicht der veränderliche Widerstand der zu betreibenden Maschinen ein grösseres Schwungrad bedingt.

Schwungräder, welche zur Ausgleichung des veränderlichen Widerstandes von Arbeitsmaschinen dienen, bringe man den Punkten, wo die Kraftabnahme stattfindet, möglichst nahe.

Schwungkugel-Regulator.

1) Watt'scher Regulator.

Bezeichnet

L die Länge eines Pendelarms in Metern,
l die Länge der Hülsenstangen in Metern,
α den Winkel, den die Pendelarme mit der Umdrehungsaxe bilden,
P das Gewicht einer Kugel incl. dem halben Gewicht einer Pendelstange in Kilogr.,
Q das Gewicht der Hülse incl. dem auf die Hülse reducirten Gewicht des Stellzeuges,
n die Anzahl der Umdrehungen pro Min.,

dann ist:

$$n = \frac{60}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L \cos. \alpha} \left(1 + \frac{Q\,l}{P\,L}\right)};$$

für $\alpha = 30^0$ und wenn $Q = 0$ hat man:

$$n = 57 \frac{\sqrt{L}}{L} \cdot \left(n = 32 \frac{\sqrt{L}}{L}, \text{ wenn L in Meter}\right).$$

Gewöhnlich nimmt man L gleich dem Cylinder-Durchmesser der Dampfmaschine und den Durchmesser der Kugel gleich 0,3 L.

Die Umdrehungszahl n kann grösser oder kleiner werden, indem man Q vergrössert oder verkleinert, d. h. die Hülse belastet oder entlastet.

2) Verbesserter Watt'scher Regulator.

Bezeichnet

L die Länge eines Pendelarms in Metern,

a den Abstand der Aufhängepunkte von der Umdrehungsaxe,

α den Winkel, den die Pendelarme beim tiefsten Stande der Kugeln mit der Umdrehungsaxe bilden,

dann ist a so zu wählen, dass die Projektion des Pendelstückes vom Mittelpunkt der Kugel bis Durchschnittspunkt mit der Umdrehungsaxe, auf die Umdrehungsaxe ($L \cdot \cos. \alpha - a \operatorname{cotg.} \alpha$) ein Maximum ist.

Man hat alsdann $a = L (\sin. \alpha)^3$.

Für $\alpha = 30^0$ ist $a = \frac{L}{8}$, für $\alpha = 25^0$ ist $a = 0{,}076\ L$.

C. Hydraulische Motoren.

Wasserräder.

1) Bezeichnet

H das Gefälle in Metern,

Q den Wasserzufluss in Cub.-Metern pro Sek.,

so ist die absolute Wasserkraft:

$$\frac{1000\ Q\ H}{75} \text{ Pferdekräfte.}$$

Der Nutzeffekt ist bei guter Konstruktion:

für unterschlächtige Räder	0,30	bis	0,35,
„ Kropfräder	0,40	„	0,50,
„ Ponceleträder	0,60	„	0,65,
„ Schaufelräder mit Ueberfall-Einlauf	0,60	„	0,65,
„ „ mit Koulissen-Einlauf	0,65	„	0,70,
„ rückschlächtige Zellenräder	0,60	„	0,70,

für oberschlächtige Räder mit geringem Gefälle . . . . 0,50 bis 0,60,
„ oberschlächtige Räder mit mehr als 5 Meter Gefälle . . . . 0,60 „ 0,70.

2) Die Umfangsgeschwindigkeit pro Sekunde betrage:

für unterschlächtige Räder = $1{,}77 \sqrt{H}$ Meter,
„ Kropfräder = 2 Meter,
„ Ponceleträder = $0{,}55 \sqrt{2\,g\,h} = 2{,}44 \sqrt{H}$ Meter,
„ Schaufelräder mit Ueberfall-Einlauf = 1,4 Meter,
„ „ mit Koulissen-Einlauf = 1,6 Meter,
„ rückschlächtige und oberschlächtige Räder = 1,3 bis 1,5 Meter.

3) Der Halbmesser betrage:

für unterschlächtige Räder = 2 bis 3,8 Meter,
„ Kropfräder = 1,5 H bis 2,5 H,
„ Ponceleträder = 2 H,
„ Schaufelräder mit Ueberfall-Einlauf = 1,25 H bis 1,5 H,
„ „ mit Koulissen-Einlauf = H,
„ rückschlächtige Räder = $^2/_3$ H,
„ oberschlächtige Räder = $^1/_2 \left(H - 4\,\frac{v^2}{2\,g}\right)$,

wenn v die Umfangsgeschwindigkeit in Metern bezeichnet.

4) Die Füllung oder das Verhältniss zwischen dem Volumen der Wassermasse, welches ein Schaufel- oder Zellenraum aufzunehmen hat und dem Volumen eines solchen Raumes, betrage:

für Schaufelräder = $^1/_3$ bis $^1/_2$,
„ Zellenräder = $^1/_5$ bis $^1/_3$.

Bezeichnet

a die radiale Dimension der Zellen in Metern,
b die Breite des Rades in Metern,
v die Umfangsgeschwindigkeit in Metern pro Sek.,

so beträgt die Füllung = $\frac{Q}{a\,b\,v}$.

5) Die radiale Dimension der Zellen nimmt man gewöhnlich zwischen folgenden Grenzen:

bei ober- und rückschlächtigen Rädern = 29 bis 31 Centim.,
„ Kropfrädern = 31 bis 42 Centim.,
„ unterschlächtigen und Poncelet-Rädern = 31 bis 52 Ctm.

Turbinen.

1) Zweckmässige Anwendung:
   a) bei sehr kleinen und bei sehr grossen Gefällen,
   b) bei grosser Geschwindigkeit der zu treibenden Arbeitsmaschinen,
   c) bei veränderlichem Unterwasser.

Für mässige Gefälle eignen sich am besten die Henschel'schen (Jonval'schen) Turbinen. Bei hohen Gefällen und geringen Wassermengen sind die Poncelet'schen Turbinen zu empfehlen.

Zur Erzeugung von veränderlichen Geschwindigkeiten, bei unreinem Wasser, auch bei sehr variablem Gefälle sind Turbinen nicht zu empfehlen.

2) Der Nutzeffekt beträgt bei guter Konstruktion:
für Stossturbinen 0,30 bis 0,35;
„ schottische Turbinen 0,50 bis 0,60;
„ Poncelet'sche Turbinen bei Gefällen von 16 bis 100 Meter im Mittel 0,60;
„ Fourneyron'sche und Henschel'sche (Jonval'sche) Turbinen 0,70 bis 0,75.

D. Dampfkessel.

Tabellen über die Wandstärken und Durchmesser für Dampfrohre, Dampfkessel und Dampfcylinder.

a) Schmiedeeiserne Dampfkessel und -Rohre mit innerem Druck.

Wandstärke in Millim.	Dampf-Ueberdruck in Atmosphären:													
	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4	$4\frac{1}{2}$	5	6	7	8	9	10
	Grösster zulässiger Durchmesser in Centimetern:													
4	160	103	79	63	53	45	39	35	31	26	22	20	18	16
5	244	159	121	96	80	69	60	58	48	40	34	30	27	24
6	330	215	162	129	107	93	81	72	64	54	46	41	36	32
7	—	272	204	163	135	116	101	90	81	68	58	51	45	40
8	—	—	245	196	162	140	122	109	98	82	70	61	54	49
9	—	—	286	230	190	164	143	127	114	95	81	71	63	57
10	—	—	—	263	217	188	164	145	131	109	93	82	72	65
11	—	—	—	—	244	211	184	164	147	123	105	92	81	73
12	—	—	—	—	272	235	205	182	164	137	117	102	90	81
13	—	—	—	—	—	259	226	200	181	151	129	112	99	89
14	—	—	—	—	—	—	247	219	197	165	141	123	108	97
15	—	—	—	—	—	—	267	237	214	179	153	133	117	105
16	—	—	—	—	—	—	—	256	231	193	165	143	126	114

b) Gussstählerne Dampfkessel und -Rohre mit innerem Druck.

Wandstärke in Millim.	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4	$4\frac{1}{2}$	5	6	7	8	9	10
4	271	179	135	106	89	77	67	59	53	45	38	33	30	27
5	—	254	190	150	126	109	95	84	75	63	54	47	42	38
6	—	329	245	195	162	140	122	108	97	82	79	61	54	49
7	—	—	300	239	199	172	150	133	119	100	85	74	66	60
8	—	—	—	283	235	204	177	158	142	118	101	88	79	71
9	—	—	—	—	272	235	205	182	164	136	117	102	91	81
10	—	—	—	—	—	267	232	207	186	155	133	116	103	92
11	—	—	—	—	—	—	260	231	218	173	148	129	115	103
12	—	—	—	—	—	—	—	256	230	191	164	143	127	114

c) Kupferne Dampfleitungsrohre mit innerem Druck.

Wandstärke in Millim.	Dampf-Ueberdruck in Atmosphären:													
	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	6	7	8	9	10
	Grösster zulässiger Durchmesser in Centimetern:													
2	27	18	14	12	9	8	7	6	6	5	4	4	3	3
3	—	62	48	38	32	27	23	21	19	16	14	12	10	9
4	—	—	—	—	—	—	40	36	32	27	25	20	17	16
5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	35	28	25	22
6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	36	32	29

d) Gusseiserne Dampfcylinder und -Rohre mit innerem Druck.

Wandstärke in Millim.	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	6	7	8	9	10
10	25	17	13	10	8	7	6	5	5	4	3	3	3	2
15	125	73	62	49	41	35	31	27	25	20	17	15	14	12
20	225	149	112	89	74	63	55	49	44	36	31	27	24	21
25	325	216	161	128	107	91	80	70	64	53	44	39	35	31
30	—	282	211	168	140	119	104	92	83	69	58	51	46	40
35	—	—	260	207	173	148	129	114	103	85	72	63	56	50
40	—	—	—	247	206	176	154	136	122	101	86	75	67	59
45	—	—	—	286	239	204	178	158	142	117	100	87	77	69
50	—	—	—	—	272	232	203	180	161	133	114	99	88	78
55	—	—	—	—	—	260	227	201	181	150	127	111	99	88
60	—	—	—	—	—	288	252	223	200	166	141	123	109	97
65	—	—	—	—	—	—	277	245	220	182	155	135	120	107

e) Messingene Feuerrohre mit äusserem Druck.

Wandstärke in Millim.	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	6	7	8	9	10
2	2	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	12	10	9	9	8	8	7	7	7	7	6	6	5	5
4	22	19	17	16	15	14	13	13	13	12	11	11	10	10
5	—	28	26	23	22	21	20	19	19	18	17	16	15	15

f) Schmiedeeiserne Feuerrohre mit äusserem Druck.

Wandstärke in Millim.	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	6	7	8	9	10
6	70	61	56	52	48	46	44	42	41	39	37	35	34	32
7	85	74	68	63	59	56	53	51	50	47	45	42	41	39
8	100	87	80	74	70	66	63	60	58	55	53	50	48	46
9	115	101	91	85	81	76	72	69	67	64	60	57	55	53
10	130	114	103	96	93	85	82	78	76	72	68	65	62	60
11	—	127	115	107	104	95	91	87	84	80	76	72	69	67
12	—	—	127	118	115	105	101	97	93	88	84	80	77	74
13	—	—	—	129	126	115	110	106	102	98	92	87	84	81
14	—	—	—	—	—	125	120	115	111	105	99	95	91	88
15	—	—	—	—	—	—	129	124	119	118	107	102	98	95
16	—	—	—	—	—	—	—	133	128	121	115	110	105	102

Nach den Versuchen von Fairbairn ist die Widerstandsfähigkeit von Röhren mit äusserem Druck von der Länge der Röhren abhängig, und wird bei grösserer Länge vermindert. Es ist daher rathsam, lange Feuerröhren durch umgelegte Ringe zu versteifen.

Zur Vergleichung diene die Fairbairn'sche Formel:

für englische Maasse $\delta = \sqrt{\frac{p\,L\,d}{161200}} = 0{,}0025 \sqrt{p\,L\,d}$,

für französische Maasse $\delta = 0{,}27 \sqrt{p\,L\,d}$,

worin:

δ die erforderliche Wandstärke in Millim.,
p den Dampfdruck in Kilogr. pro Qu.-Centim.,
d den Durchmesser der Feuerrohre in Centim.,
L die Länge derselben (zwischen den Versteifungsringen) in Metern

bezeichnet.

Heizfläche und Verdampfung.

1) Man rechnet Heizfläche pro effektive Pferdekraft:

a) für gewöhnliche Kessel 1,5 bis 2 Qu.-Meter;
b) für Gussstahlkessel und Kessel mit dünnen Eisenstärken 1,2 bis 1,5 Qu.-Meter.
c) Für Kessel, bei denen Garantie auf geringen Kohlenverbrauch eingegangen ist, bis 2,5 Qu.-Meter;
d) für Dampfschiffskessel 0,6 bis 0,8 Qu.-Meter;
e) für Lokomotivkessel bei scharfem künstlichen Zug 0,4 bis 0,6 Qu.-Meter;
f) für Lokomobilkessel 0,6 bis 1,0 Qu.-Meter.

2) Die Verdampfung beträgt pro effektive Pferdekraft und Stunde 0,023 bis 0,031 Cub.-Meter.

Die vorstehende Angabe passt für gut konstruirte Hochdruckmaschinen ohne Condensation und ohne Expansion.

3) Die Heizfläche verdampft Wasser pro Stunde:

bei gewöhnlichen Kesseln 15 bis 20 Kilogr. pro Qu.-Meter;
bei Gussstahlkesseln 20 bis 25 Kilogr. pro Qu.-Meter;

bei Dampfschiffskesseln 27 bis 35 Kilogr. pro Qu.-Meter;
bei Lokomotivkesseln 42 bis 50 Kilogr. pro Qu.-Meter.

Feuerung.

1) Die Grösse der totalen Rostfläche betrage:

a) Bei stationären Kesseln pro effektive Pferdekraft: für Steinkohlenfeuerung 0,05 bis 0,066 Qu.-Meter; für Holz- und Braunkohlenfeuerung 0,075 bis 0,1 Qu.-Meter.

b) Bei Schiffskesseln $^1/_{26}$ bis $^1/_{27}$ der totalen Heizfläche;

c) Bei Lokomotiv- und Lokomobilkesseln $^1/_{50}$ bis $^1/_{80}$ der totalen Heizfläche.

2) Die freie Rostfläche betrage:

für Steinkohlenfeuerung	$^1/_4$ bis $^1/_3$	der totalen Rostfläche.
„ Braunkohlenfeuerung	$^1/_5$ „ $^1/_3$	
„ Holzfeuerung	$^1/_7$ „ $^1/_6$	

3) Der Consum an Steinkohlen beträgt (bei Hochdruckmaschinen) pro Pferdekraft und Tag à 12 Stunden 1 bis $1^1/_5$ Scheffel = 1 bis $1^1/_5$ Centner.

3 Pfund mittlere Steinkohlen verdampfen so viel als 5 Pfund Braunkohlen oder 8 Pfund Holz.

Condensation bei Dampfmaschinen spart ca. 20 % Brennmaterial.

Durchschnittlich kann man die von 1 Pfund Brennstoff producirte Dampfmenge annehmen:

bei lufttrockenem Holz . .	=	2,4 Pfund,
„ trockenem Torf	=	4,2 „
„ Torf mit 20 % Wasser	=	3,1 „
„ Braunkohle	=	3,9 „
„ mittlere Steinkohle . .	=	6,5 „
„ Coks mit 15 % Asche .	=	5,2 „

Kessel mit dünnen Blechstärken geben pro Pfund Brennmaterial eine bis 28 % grössere Verdampfung als gewöhnliche Dampfkessel.

Schornsteine.

1) Die Höhe der Schornsteine, oft von lokalen Verhältnissen abhängig, mache man selbst für kleine Kessel von 4 Pferdekraft an nicht unter 16 Meter.

Lokomobil-Schornsteinen gebe man über dem Ausblaserohre eine Höhe von mindestens dem 5- bis 6fachen Durchmesser.

2) Material und Querschnittsform.

a) Runde Blechschornsteine sind für kleine Dimensionen billig und zu empfehlen:
bei beschränkter Bauzeit, bei schlechtem Baugrund und bei provisorischen Anlagen.

b) Gemauerte runde Schornsteine sind als billig und gut zu empfehlen.

c) Gemauerte 8- und 4kantige (erstere vorzuziehen) sind bei gutem Baugrund zu empfehlen, wenn ordinaire Steine billig und Formsteine zu runden Schornsteinen nicht leicht zu beschaffen sind.

3) Den Querschnitt der Mündung nehme man:

a) Für stationäre Schornsteine:
bei 16 bis 31 Metern Höhe = $^{8}/_{5}$ bis $^{1}/_{3}$ der freien Rostfläche = 0,006 bis 0,01 Qu.-Meter pro Pferdekraft;
bei 31 bis 62 Metern Höhe = $^{1}/_{3}$ bis $^{1}/_{6}$ der freien Rostfläche = 0,003 bis 0,006 Qu.-Meter pro Pferdekraft.

b) Für Lokomobil-Schornsteine = dem 1- bis $1^{1}/_{2}$-fachen Cylinder-Durchmesser der Maschine.

Den untern innern Durchmesser nehme man aus stabilen Rücksichten $^{1}/_{60}$ der Höhe grösser als den obern lichten Durchmesser.

Dampfleitung.

1) Durchmesser mindestens gleich dem $1^{1}/_{4}$fachen Durchmesser des Sicherheitsventils.

Gusseiserne Dampfleitungen bis 26 Centim. Durchmesser.

Darüber nehme man schmiedeeiserne Dampfleitungen von mindestens 31 Centim. Durchmesser.

2) **Ausdehnung der Dampfleitung:**
bei gusseisernen Röhren $^1/_{900}$ der Länge;
„ schmiedeeisernen Röhren $^1/_{800}$ der Länge.

3) **Die Condensation in Dampfleitungen beträgt** bei einer Dampfspannung von 2 bis 4 Atmosphären Ueberdruck:

durchschnittlich pro 1 Qu.-Meter Oberfläche und pro Stunde:

bei guter Umhüllung 0,75 bis 1 Kilogr. Wasser;
ohne Umhüllung . . 2 „ 3 „ „

E. Dampfmaschinen.

Effektberechnung.

Es bezeichne:

N die theoretische Leistung der Maschine in Pferdekräften,
α den Wirkungsgrad,
α N die effektive Leistung in Pferdekräften,
γ das Maass einer Pferdekraft = 75 Kilogr.-Meter pro Sek.,
S die totale Dampfspannung incl. Atmosphärendruck,
s die mittlere auf den Kolben wirkende Dampfspannung incl. Atmosphärendruck in Kilogr. pro Qu.Centim.,
p den schädlichen Gegendruck, herrührend von der Spannung im Condensator oder dem Druck der Luft, in Kilogr. pro Qu.-Centim.,
(s — p) den mittlern Ueberdruck in Kilogr. pro Qu.-Centim.,
f den Querschnitt des Dampfcylinders in Qu.-Centim.,
v die Kolbengeschwindigkeit in Metern pro Min.,

dann hat man:

$$N = \frac{f(s-p)v}{60\gamma} \text{ Pferdekräfte; } f = 60\gamma \frac{N}{v(s-p)},$$

und

$$\alpha N = \alpha \frac{f(s-p)v}{60\gamma} \text{ Pferdekräfte; } f = 60\gamma \frac{\alpha N}{\alpha v(s-p)}.$$

2) Tabelle über die mittlere Spannung s bei verschiedenen Füllungsgraden.

Füllungsgrad =	1/12	1/11	1/9	1/8	1/6	1/5	1/4
Mittl. Spannung s =	0,275 S.	0,3 S.	0,35 S.	0,385 S.	0,45 S.	0,525 S.	0,6 S.
Füllungsgrad =	1/2	5/8	1/2	5/8	3/4	7/8	1
Mittl. Spannung s =	0,7 S.	0,725 S.	0,85 S.	0,925 S.	0,95 S.	0,975 S.	S.

3) Der schädliche Gegendruck beträgt:

bei Condensations-Maschinen p = 0,15 bis 0,3 Kilogr. pro Qu.-Centim.;

„ Maschinen ohne Condensation p = 1,1 Kilogr. pro Qu.-Centim.;

„ Lokomotiven und Lokomobilen p = 1,2 Kilogr. pro Qu.-Centim.

4) Tabelle über die Wirkungsgrade verschiedener Maschinen.

Pferdekräfte. αN	Niederdruckmaschinen. $\alpha =$	Woolf'sche Maschinen. $\alpha =$	Hochdruckmaschinen ohne Expansion. $\alpha =$	Hochdruckmaschinen mit Expansion. $\alpha =$
4 bis 10	0,40 bis 0,50	—	0,40 bis 0,50	0,30 bis 0,40
10 „ 20	0,43 „ 0,53	—	0,45 „ 0,55	0,35 „ 0,45
20 „ 30	0,46 „ 0,56	0,30 bis 0,35	0,45 „ 0,60	0,30 „ 0,50
30 „ 40	0,48 „ 0,58	0,35 „ 0,40	0,50 „ 0,65	0,45 „ 0,55
40 „ 100	0,50 „ 0,60	0,40 „ 0,55	0,55 „ 0,70	0,50 „ 0,70

Die Wirkungsgrade für Zwillingsmaschinen sind höher als für Maschinen mit 1 Cylinder und betragen bis $\alpha = 0,75$.

5) Die theoretische Leistung einer Woolf'schen Maschine ist gleich der Leistung einer gewöhnlichen Maschine mit dem grossen Cylinder, in welchem dieselbe Expansion stattfindet, wie bei der Woolf'schen Maschine.

Für Woolf'sche Maschinen bestimme man daher zunächst die Dimensionen des grossen Cylinders wie für eine gewöhnliche Maschine unter der Voraussetzung, dass die Füllung des grossen Cylinders dem angenommenen Expansions-Verhältnisse entspricht. Dio Dimensionen des kleinen Cylinders wähle man so, dass der Dampf bei $^2/_3$ des Hubes abgesperrt wird.

6) 1 Cub.-Meter Dampf pro Sek. von 1 Atmosphäre Spannung gibt ohne Berücksichtigung des schädlichen Gegendruckes eine theoretische Leistung von 136 Pferdekräfte.

Unter Berücksichtigung des schädlichen Gegendruckes hat man die theoretische Leistung bei n Atmosphären Gesammtspannung (incl. Atmosphärendruck):

Bei Condensationsmaschinen:

$$136\,n - \frac{0{,}3}{1{,}03}\,136 \text{ Pferdekräfte, bei 1 Cub.-Meter pro Sek.,}$$

Bei Maschinen ohne Condensation:

$$136\,n - \frac{1{,}1}{1{,}03}\,136 \text{ Pferdekräfte, bei 1 Cub.-Meter pro Sek.}$$

Bei Lokomotiven:

$$136\,n - \frac{1{,}2}{1{,}03}\,136 \text{ Pferdekräfte, bei 1 Cub.-Meter pro Sek.}$$

Lässt man den Dampf expandiren, so hat man die theoretische Leistung, wenn die Gesammtspannung vor der Expansion n Atmosphären betrug:

Bei Condensationsmaschinen:

$$L = 136\,\varrho\,n - 40 \text{ Pferdekräfte, bei 1 Cub.-Meter pro Sek.}$$

Bei Maschinen ohne Condensation:

$$L = 136\,\varrho\,n - 145 \text{ Pferdekräfte, bei 1 Cub.-Meter pro Sek.}$$

Bei Lokomotiven:
$L = 136 \varrho n - 158$ Pferdekräfte, bei 1 Cub.-Meter pro Sek., unter ϱ den dem Expansionsverhältniss entsprechenden Koëffizienten verstanden.

7) Für Dampfmaschinen mit voller Füllung hat man annähernd bei 3 Atmosphären Ueberdruck und 50 % Nutzeffekt:

Bei 75 Meter Kolbengeschwindigkeit und einem Cylinderdurchmesser von d Centimeter:

$$\alpha N = 0{,}02 d^2.$$

Diesen Werth multiplicire man:

Bei n Atmosphären Ueberdruck mit $\frac{n}{3}$;

„ α Nutzeffekt mit $\frac{\alpha}{0{,}50}$;

„ v Kolbengeschwindigkeit mit $\frac{v}{180}\left(\frac{v}{75}\right)$;

„ einer Maschine mit Expansion, wenn man den mittleren Ueberdruck $(s - p)$ in Atmosphären ausdrückt, mit $\frac{(s-p)}{3}$.

Kolbengeschwindigkeit.

Bei stationären Maschinen wendet man Kolbengeschwindigkeiten von 56 bis 250 Meter pro Minute an. Letztere Geschwindigkeit kommt bei Walzenzugmaschinen vor.

Bezeichnet

N die theoretische Nutzleistung der Maschine in Pferdekräften,

$(s - p)$ den mittleren Ueberdruck in Kilogr. pro Qu.-Centim.,

z die Anzahl der Umdrehungen pro Min.,

x das Verhältniss des Hubes am Cylinderdurchmesser,

v die Kolbengeschwindigkeit in Metern pro Min.,

so hat man:

$$v = 1{,}32 \sqrt[3]{\frac{x^2 z^2 N}{(s-p)}}.$$

Nimmt man $x = 2$, so ist:

$$v = 2{,}1 \sqrt[3]{\frac{z^3 N}{(s-p)}}.$$

Ist z nicht vorgeschrieben, so pflegt man die Kolbengeschwindigkeit

bei gewöhnlichen Maschinen 63 bis 94 Meter,
„ Maschinen mit geringen Dimensionen 94 bis 157 Meter,
„ Lokomotiven nicht über 150 Meter,
„ direkt wirkenden Wasserhaltungs- und Pumpmaschinen 28 bis 38 Meter

zu wählen.

Dampfkanäle.

Der Querschnitt der Zuleitungskanäle betrage:
bei grosser Kolbengeschwindigkeit $^1/_{16}$ bis $^1/_{20}$;
„ gewöhnlicher Kolbengeschwindigkeit $^1/_{20}$ bis $^1/_{30}$ vom Querschnitt des Cylinders.

Der Querschnitt der Ausströmungskanäle betrage $^5/_4$ vom Querschnitt der Zuleitungskanäle.

Bei Lokomobilen verenge man die Ausblaseöffnung im Schornsteine auf $^1/_2$ des ursprünglichen Querschnitts.

Condensation, Luftpumpe und Speisewasser.

1) Bei einer Temperatur von 40° im Condensator rechne man pro Pferdekraft und Stunde 0,62 Cub.-Meter Einspritzwasser.

2) Die Luftpumpe muss an Wasser. Luft und Dampf pro effektive Pferdekraft und Stunde 2,22 Cub.-Meter fördern können. Der Sicherheit halber nehme man das Doppelte, also pro Pferdekraft und Stunde 4,44 Cub.-Meter.

Bei der Watt'schen Maschine beträgt der Durchmesser der Luftpumpe = $^2/_3$ vom Durchmesser des Cylinders, der Hub in der Luftpumpe = dem halben Hub des Dampfkolbens.

3) Das Volum des Condensators nehme man gleich dem Volum der Luftpumpe.

4) Jede Speise-Vorrichtung muss pro Pferdekraft und Stunde 0,03 Cub.-Meter Wasser liefern können; der Sicherheit wegen nehme man das doppelte bis 3fache Quantum an.

F. Dampfhämmer.

A. Die Bestimmung des Cylinder-Durchmessers hängt ab: Vom Gewichte des Fallbärs, von der Hubhöhe, Anzahl der Schläge und Grösse der Dampfspannung.

Folgende Angaben sind im Allgemeinen passend: Bezeichnet

f den Querschnitt des Cylinders nach Abzug des Querschnitts der Kolbenstange in Qu.-Centim.,
s den niedrigsten Dampf-Ueberdruck, mit welchem der Hammer arbeiten soll, in Kilogr. pro Qu.-Centim.,
G das Gewicht des Hammers in Kilogr.,

dann nehme man:

1) Für Schnellhämmer mit doppelter Füllung des Cylinders

bis 3 Ctr. Fallgewicht, bei 300 bis 400 Schlägen pro Min. . . . . f s = (5 bis 6) G,
bei 3 bis 10 Ctr. Fallgewicht und 150 bis 300 Schlägen pro Min. . . . f s = (4 bis 5) G.

2) Für Dampfhämmer

von 10 bis 25 Ctr. . . . . . f s = (2,5 bis 3) G,
„ 25 „ 50 „ . . . . . f s = (2 bis 2,5) G,
„ 50 „ 100 „ . . . . . f s = (1,75 bis 2) G,
„ 100 „ 200 „ . . . . . f s = (1,5 bis 1,75) G.

B. Der Durchmesser der Kolbenstange betrage:

1) Für Dampfhämmer mit dicker Kolbenstange $^1/_2$ bis $^5/_8$ des Cylinder-Durchmessers.

2) Für Dampfhämmer mit dünner Kolbenstange:

Bei einem Hube von	Zum Schmieden von Eisen	Zum Schmieden von Stahl
weniger als 1 Meter . .	$^1/_{12}$ bis $^1/_{10}$	$^1/_{10}$ bis $^1/_8$
1 bis 2 Meter	$^1/_{10}$ „ $^1/_8$	$^1/_8$ „ $^1/_6$
mehr als 2 Meter	$^1/_8$ „ $^1/_6$	$^1/_6$ „ $^1/_5$
	vom Durchmesser des Cylinders.	

Bei Anwendung von frischem Oberdampf nehme man den Durchmesser der Kolbenstange 25 % stärker.

C. Den Hub des Hammers kann man unter gewöhnlichen Verhältnissen $= 0{,}026 \sqrt{G}$ Meter bei G Kilogr. annehmen.

Absperrung des Dampfes durch den Sicherheitshebel erfolge auf $^2/_5$ bis $^3/_5$ des Hubes. Das Oeffnen der Ausströmungsöffnung auf $^3/_5$ bis $^4/_5$ des Hubes.

D. Das Gewicht der Chabotte betrage:

Für Hämmer zum Schmieden von Eisen im Min. das 8fache Gewicht des Fallbärs;

„ Hämmer zum Schmieden von Stahl im Min. das 12fache Gewicht des Fallbärs.

Bei Hämmern mit frischem Oberdampf nehme man das Gewicht der Chabotte um 30 % grösser an.

G. Pumpen.

Der Kraft-Verbrauch einer Pumpe beträgt:

$$\alpha \frac{Q\,H}{75 \cdot 60} \, 1000 \text{ Pferdekräfte,}$$

wenn H die Summe der Sauge- und Druckhöhe in Metern bezeichnet.

Der Koëffizient α beträgt:

bei sorgfältig ausgeführten Pumpen $\alpha = 1{,}25$;
„ guten Pumpen $\alpha = 1{,}3$;
„ gewöhnlichen Pumpen $\alpha = 1{,}4$ bis $1{,}5$.

Bei Bergwerkspumpen macht man das Gewicht des Pumpengestänges:

bei 2 Meter Hub in der Pumpe = 1,14, bei 3 Meter Hub = 1,1 vom Gewichte der auf den Plunger wirkenden Wassersäule.

Centrifugalpumpen wendet man mit Vortheil für massenhafte Wasserförderungen auf mässige Höhen an. Die Saugehöhe ist möglichst gering, womöglich nicht über 3,8 Meter, im Maximum 6 Meter zu wählen. Die ganze Hebehöhe wählt man womöglich nicht über 12,55 Meter, und beträgt dann bei guter Konstruktion der Nutzeffekt von der Betriebskraft 50 bis 70 %. Bei grösserer Hebehöhe fällt der Nutzeffekt bedeutend.

Umfangsgeschwindigkeit des Flügelrades wählt man passend gleich $^3/_2$ mal Ausflussgeschwindigkeit unter einer Druckhöhe gleich der totalen Hebehöhe ($^3/_2 \sqrt{2gh}$, wenn h die Hebehöhe bezeichnet). Pro theoretische Pferdekraft rechne man 0,3 Qu.-Meter Riemen-Abwickelung pro Sekunde.

H. Gebläse.

A. Ventilatoren.

1) Bezeichnet

Q die pro Sekunde zu liefernde Luftmenge in Cub.-Met.,
h den Druck des Windes am Ausblasehals in Centim. einer Wassersäule,
p den Druck des Windes in Kilogr. pro Qu.-Centim.,
γ das Gewicht eines Cub.-Meter Wasser,
ϱ den Wirkungsgrad (0,25 bis 0,40),
N die Betriebskraft in Pferdekräften,

dann hat man:

$$p = \frac{g\,h}{1000000} = 0{,}001\ h;$$

$$N = \frac{1}{\varrho}\ \frac{\gamma\,h}{75 \cdot 100}\ Q.$$

Beträgt der Wirkungsgrad 0,30, so hat man:

$$N = 0{,}444\ h\ Q = 444\ p\ Q.$$

2) Die Umfangsgeschwindigkeit des Flügelrades pro Sekunde nimmt man: v = 50 bis 86 Meter.

Für 1 Schmiedefeuer kann man pro Sek. 0,02 bis 0,03 Cub.-Meter, für 100 Pfund einzuschmelzendes Eisen 31 bis 37 Cub.-Meter Wind rechnen.

B. Cylinder-Gebläse.

1) Bezeichnet

F den Querschnitt des Gebläsecylinders in Qu.-Metern,
v die mittlere Kolbengeschwindigkeit in Metern pro Min.,
α den Nutzeffekt, je nach der Güte des Gebläses = 0,60 bis 0,75,
Q das pro Sek. zu liefernde Windquantum in Cub.-Met.,

so hat man:

$$Q = \alpha\,\frac{F\,v}{60}.$$

2) Die Betriebskraft beträgt bei einem Druck von h Centim. oder p pro Qu.-Centim.:

$$N = \frac{1}{\varrho} \frac{10000\, F\, p\, v}{75 \cdot 60} = \frac{1}{\varrho\, \alpha} \frac{1000\, h}{75 \cdot 100} Q = \frac{1}{\varrho\, \alpha} \frac{10000\, p}{75} Q$$

Pferdekräfte,

wobei der Wirkungsgrad $\varrho = 0{,}70$ bis $0{,}75$ und $\alpha\, \varrho = 0{,}45$ bis $0{,}60$ anzunehmen ist.

Für hohe Windpressungen ist statt der Spannung p eine mittlere Spannung μ p einzusetzen und kann man annehmen für:

p =	0,073	0,146	0,219	0,292	0,365	0,439	0,512	0,585	0,658
μ =	0,97	0,94	0,91	0,89	0,85	0,81	0,78	0,75	0,72

Kilogr. pro Qu.-Centim.

3) Die mittlere Kolbengeschwindigkeit wählt man gewöhnlich v = 56 bis 75 Meter, bei guter Konstruktion der Windabsperrungen nimmt man v = 75 bis 125 Meter.

4) Die Länge des Kolbenlaufs nimmt man für Windcylinder bis 1,6 Meter Durchmesser gleich dem 1- bis $^6/_5$fachen, darüber Durchmesser gleich dem $^3/_4$- bis 1fachen Durchmesser des Cylinders.

5) Querschnitt der Saugeventile = $^1/_{12}$ bis $^1/_9$,
„ „ Druckventile = $^1/_{25}$ bis $^1/_{20}$
vom Querschnitt des Windcylinders.

I. Wärme.

Thermometer-Skalen.

n Grad Celsius = 32 + $^9/_5$ n Grad Fahrenheit = $^4/_5$ n Grad Reaumur.

n Grad Reaumur = 32 + $^9/_4$ n Grad Fahrenheit = $^5/_4$ n Grad Celsius.

n Grad Fahrenheit = $^5/_9$ (n — 32) Grad Celsius = $^4/_9$ (n — 32) Grad Reaumur.

Tabelle zur Vergleichung der Thermometergrade.

Celsius.	Reaumur.	Fahrenheit.	Celsius.	Reaumur.	Fahrenheit.	Celsius.	Reaumur.	Fahrenheit.	Celsius.	Reaumur.	Fahrenheit.
—20	—16	—4	23	18,4	73,4	66	52,8	150,8	109	87,2	228,2
—19	—15,2	—2,2	24	19,2	75,2	67	53,6	152,6	110	88,0	230,0
—18	—14.4	—0,4	25	20,0	77,0	68	54,4	154,4	111	88,8	231,8
—17	—13,6	1,4	26	20,8	78,8	69	55,2	156,2	112	89,6	233,6
—16	—12,8	3,2	27	21,6	80,6	70	56,0	158,0	113	90,4	235,4
—15	—12,0	5,0	28	22,4	82,4	71	56,8	159,8	114	91,2	237,2
—14	—11,2	6,8	29	23,2	84,2	72	57,6	161,6	115	92,0	239,0
—13	—10,4	8,6	30	24,0	86,0	73	58,4	163,4	116	92,8	240,8
—12	— 9,6	10,4	31	24,8	87,8	74	59,2	165,2	117	93,6	242,6
—11	— 8,8	12,2	32	25,6	89,6	75	60,0	167,0	118	94,4	244,4
—10	— 8,0	14,0	33	26,4	91,4	76	60,8	168,8	119	95,2	246,2
— 9	— 7,2	15,8	34	27,2	93,2	77	61,6	170,6	120	96,0	248,0
— 8	— 6,4	17,6	35	28,0	95,0	78	62,4	172,4	121	96,8	249,8
— 7	— 5,6	19,4	36	28,8	96,8	79	63,2	174,2	122	97,6	251,6
— 6	— 4,8	21,2	37	29,6	98,6	80	64,0	176,0	123	98,4	253,4
— 5	— 4,0	23,0	38	30,4	100,4	81	64,8	177,8	124	99,2	255,2
— 4	— 3,2	24,8	39	31,2	102,2	82	65,6	179,6	125	100,0	257,0
— 3	— 2,4	26,6	40	32,0	104,0	83	66.4	181,4	126	100,8	258,8
— 2	— 1,6	28,4	41	32,8	105,8	84	67,2	183,2	127	101,6	260,6
— 1	— 0,8	30,2	42	33,6	107,6	85	68,0	185,0	128	102,4	262,4
0	0	32,0	43	34,4	109,4	86	68,8	186,8	129	103,2	264,2
1	0,8	33,8	44	35,2	111,2	87	69,6	188,6	130	104,0	266,0
2	1,6	35,6	45	36,0	113,0	88	70,4	190,4	131	104,8	267,8
3	2,4	37,4	46	36,8	114,8	89	71,2	192,2	132	105,6	269,6
4	3,2	39,2	47	37,6	116,6	90	72,0	194,0	133	106,4	271,4
5	4,0	41,0	48	38,4	118,4	91	72,8	195,8	134	107,2	273,2
6	4,8	42,8	49	39,2	120,2	92	73,6	197,6	135	108,0	275,0
7	5,6	44,6	50	40,0	122,0	93	74,4	199,4	136	108,8	276,8
8	6,4	46,4	51	40,8	123,8	94	75,2	201,2	137	109,6	278,6
9	7,2	48,2	52	41,6	125,6	95	76,0	203,0	138	110,4	280,4
10	8,0	50,0	53	42,4	127,4	96	76,8	204,3	139	111,2	282,2
11	8,8	51,8	54	43,2	129,2	97	77,6	206,6	140	112,0	284,0
12	9,6	53,6	55	44,0	131,0	98	78,4	208,4	141	112,8	285,8
13	10,4	55,4	56	44,8	132,8	99	79,2	210,2	142	113,6	287,6
14	11,2	57,2	57	45,6	134,6	100	80,0	212,0	143	114,4	289,4
15	12,0	59,0	58	46,4	136,4	101	80,8	213,8	144	115,2	291,2
16	12,8	60,8	59	47,2	138,2	102	81,6	215,6	145	116,0	293,0
17	13,6	62,6	60	48,0	140,0	103	82,4	217,4	146	116,8	294,8
18	14,4	64,4	61	48,8	141,8	104	83,2	219,2	147	117,6	296,6
19	15,2	66,2	62	49,6	143,6	105	84,0	221,0	148	118,4	298,4
20	16,0	68,0	63	50,4	145,4	106	84,8	222,8	149	119,2	300,2
21	16,8	69,8	64	51,2	147,2	107	85,6	224,6	150	120,0	302,0
22	17,4	71,6	65	52,0	149,0	108	86,4	226,4	151	120,8	303,8

Temperatur bei verschiedenen Wärme-Bezeichnungen.

	Grad C.		Grad C.
Im Dunkeln rothglühend	525	Dunkelorange . .	1100
Dunkelroth	700	Hellorange	1200
Dunkelkirschroth	800	Weissglühend . . .	1300
Kirschroth	900	Schweisshitze . . .	1400
Hellkirschroth	1000	Blendendweiss . .	1500

Tabelle über die Längenausdehnung verschiedener Körper bei der Wärmezunahme von 0 bis 100 Grad C.

Benennung.	Längen-Ausdehn.	Benennung.	Längen-Ausdehn.	Benennung.	Längen-Ausdehn.
Blei . . .	$^1/_{351}$	Messing . . .	$^1/_{535}$	Stahl, gehärtet	$^1/_{807}$
Glas . . .	$^1/_{1160}$	Platin	$^1/_{1100}$	Zink	$^1/_{340}$
Gold . . .	$^1/_{682}$	Silber	$^1/_{524}$	Zinn	$^1/_{516}$
Gusseisen . .	$^1/_{900}$	Stabeisen . . .	$^1/_{812}$	Quecksilber .	$^1/_{166,5}$
Kupfer . . .	$^1/_{582}$	Stahl, ungehärtet	$^1/_{927}$	Wasser . . .	$^1/_{71,4}$

Die körperliche Ausdehnung von 0 bis 100 Grad C. beträgt für:

Quecksilber = $^1/_{55,5}$; Wasser = $^1/_{23,8}$; Luft = $^{11}/_{30}$.

Die Ausdehnung des Wassers ist bei verschiedenen Temperaturen sehr verschieden. Bei 4 Grad C. ist die Dichtigkeit desselben ein Maximum.

Tabelle der specifischen Wärme verschiedener Körper.

Einheit = Wärmeaufwand, um die Temperatur von 1 Pfund Wasser um 1 Grad C. zu erhöhen = 1 Calorie.

Benennung.	Spec. Wärme.	Benennung.	Spec. Wärme.	Benennung.	Spec. Wärme.
Blei . . .	0,0314	Quecksilber .	0,0333	Zinn	0,0562
Glas . . .	0,1777	Schmiedeeisen	0,1138	Alkohol, abs. . .	0,7000
Gusseisen .	0,1298	Silber . . .	0,0570	Wasser	1,000
Kupfer . .	0,0952	Stahl . . .	0,1185	Luft (const. Vol.)	0,1687
Messing . .	0,0939	Zink	0,0956	„ (const. Druck)	0,2377

Schmelzpunkte verschiedener Körper.

Benennung.	Grad C.	Benennung.	Grad C.
Schmiedeeisen . .	1600	Zink	360
Stahl . . 1300 bis	1400	Blei	330
Gusseisen 1050 bis	1200	Wismuth	260
Kupfer	1100	Zinn	230
Messing	900	Schwefel	109
Antimon	432	Quecksilber . . .	—39

Schmelzpunkte verschiedener leicht schmelzbarer Legirungen.

Grad C.	Gewichtstheile			Grad C.	Gewichtstheile	
	Zinn.	Blei.	Wismuth.		Zinn.	Blei.
77	3	5	8	144	3	1
99	1	1	1	151	1	1
116	2	2	1	155	6	1
124	3	3	1	183	1	2
135	3	3	—	207	1	4

Siedepunkte und latente Wärme der Dämpfe verschiedener Körper.

Benennung.	Siedep. Gr. C.	Lat. W. Gr. C.	Benennung.	Siedep. Gr. C.	Lat. W. Gr. C.
Quecksilber .	350	—	Wasser . . .	100	540
Schwefelsäure .	326	—	Alkohol . . .	78	214
Schwefel . .	316	—	Schwefeläther	36	91

Linearschwindmaass verschiedener Metalle.

Gusseisen = $^1/_{96}$; Messing = $^1/_{65}$; 100 Th. Kupfer } = $^1/_{134}$.
Zink . . = $^1/_{62}$; Blei . = $^1/_{92}$; $12^1/_2$ „ Zinn }

In Walzwerken rechnet man pro lfd. Meter 42 Centim. Schwindung.

Dampf- und Wasserheizung.

1) Dampfheizung: Bei gusseiserner Heizfläche rechnet man 63—94 Cub.-Meter pro Qu.-Meter.

Zur Heizung von Werkstätten 94—157 Cub.-Meter pro Qu.-Meter. Es condensirt pro Stunde ca. 1,78 Kilogr. pro Qu.-Meter Dampf.

2) Warmwasserheizung: Auf 39—47 Cub.-Meter Raum rechne man 1 Qu.-Meter kupferne Heizfläche.

Leitungsvermögen zwischen Kupfer, Eisenblech und Gusseisen = 1 : $^5/_{12}$: $^2/_3$.

Tabelle über die Spannkraft, das specifische Volumen und Gewicht des Wasserdampfes bei verschiedenen Temperaturen.

Spannung in Atmosph.	Temperatur Grad Cels.	Spec. Volum. 1 Vol. Wasser gibt Vol. Dampf	Gewicht von 1 Cub.-Meter Dampf. Kilogr.	Spannung in Atmosph.	Temperatur Grad Cels.	Spec. Volum. 1 Vol. Wasser gibt Vol. Dampf	Gewicht von 1 Cub.-Meter Dampf. Kilogr.
0,072	40,0	20347	0,0492	3,50	140,4	538	1,859
0,125	51,0	11971	0,0835	4,00	145,0	476	2,101
0,25	66,0	6114	0,1636	4,50	149,1	428	2,339
0,50	82,0	3206	0,3119	5,00	153,3	389	2,574
0,75	92,0	2224	0,4496	6,00	160,0	328	3,044
1,00	100,0	1696	0,5896	7,00	166,5	286	3,494
1,25	106,6	1381	0,7239	8,00	172,1	254	3,941
1,50	112,4	1169	0,8554	9,00	177,4	228	4,381
1,75	117,1	1014	0,9832	10,00	182,0	208	4,817
2,00	121,5	896	1,1165	11,00	186,0	190	5,256
2,25	125,5	806	1,2329	12,00	190,0	176	5,683
2,50	128,8	732	1,3664	13,00	193,7	164	6,107
2,75	132,1	671	1,4906	14,00	197,2	153	6,527
3,00	135,0	619	1,6145	15,00	200,2	144	6,944

Anm. Werden die Zahlen der letzten Spalte mit 0,001 multiplicirt, so erhält man das spec. Gewicht des Wasserdampfes.

VII. Eisenbahnbau.

Normal-Profil des freien Raumes für Eisenbahnen.

Für die freie Bahn.	Für die Bahnhöfe.		Meter-Maass.
		a	0,762
		b	1,525
		c	2,007
		d	1,652
		e	1,372
		f	1,143
		g	0,229
		h	0,381
		i	0,762
		k	1,220
		l	3,050
		m	0,839
		n	0,915

Bahn-Anlage.

Kronbreite:

für 2geleisige Bahnen	7,5	Meter,
„ 1 „ „	4,0	„

Gefälle:

im flachen Lande	1:200	„
„ Gebirgs- „	1:40	„
„ Hügel- „	1:100	„

Krümmungshalbmesser der Kurven:

im flachen Lande	1100	„
„ Hügel- „	600	„
ausnahmsweise	350	„
im Gebirgslande	300	„
ausnahmsweise	180	„
Spurweite im Lichten	1,436	„

In Kurven von mehr als 600 Meter Halbmesser wird das Spurmaass nicht erweitert, bei 180 Meter Halbmesser beträgt die Erweiterung höchstens 25 Millim.

Bahnhöfe.

Entfernung der Geleise von

Mitte zu Mitte	3,7 Meter bis 4,3 Meter,
für Hauptgeleise	5,2 Meter.

Radius der Weichen:

für ganze Züge	180	Meter,
„ Endweichen	300	„

Ausfahrtsthore:

für Lokomotivschuppen	4,8	Meter	hoch,
	3,35	„	breit,
für Wagenschuppen	4,8	„	hoch,
	3,35	„	breit.

Entfernung der Geleise darin

von Mitte zu Mitte	4,4 Meter.

Lokomotiven.

1) Tabelle über die mittleren Dimensionen der Haupttheile von Lokomotiven nebst Angabe des Gewichtes.

Lokomotive für	Durchm. der Cylinder. Centimet.	Kolbenhub. Centimet.	Triebräder. Anzahl.	Triebräder. Durchm. Meter.	Radstand. Meter.	Gesammt-Heizfläche. Quadr.-Meter.	Gewicht ohne Tender incl. Füllung. Centner.	Geschw. pro Dec.-Myriameter à 1,33 Meilen.
Personenzüge.	36-42	52-58	2	1,9-2,2	4,1-4,7	70-100	450-600	4,5-7,5
Gemischte Züge	39-45	58-63	4	1,6-1,9	3,5-4,4	80-110	500-600	3-4,5
Güterzüge . . .	42-47	58-63	4-6	1,3-1,6	3,5-4,4	80-130	550-800	2,3-3
Gebirgsbahnen	42-47	58-68	6-8	1,1-1,4	3,1-4,1	110-140	800-1000	1,5-2,3

Es ist ein nach den Bahnverhältnissen möglichst langer Radstand zu empfehlen; jedoch ist für Bahnen, welche in freier Bahn vielfach Kurven enthalten von:

240 bis 300 Meter Radius 3 Meter,
300 „ 360 „ „ 3,8 „
360 „ 460 „ „ 4,3 „
460 Meter „ 4,9 „

als Maximum des Standes der festen Axen zu empfehlen.

Die Breite der Lokomotiven soll an keiner Stelle mehr als 3,05 Meter betragen. Höhe des Schornsteins über Oberkante der Schienen nicht über 4,57 Meter.

2) Der Reibungskoëffizient der Räder auf den Schienen beträgt:

bei trockener Witterung . . = $^1/_8$,
„ gewöhnlicher Witterung = $^1/_6$,
„ Schnee und Regen . . . = $^1/_{10}$.

3) Der Widerstand eines Zuges beträgt pro Tonne (à 20 Ctr.) seines Gewichtes bei einer Geschwindigkeit von v Meilen in der Stunde auf horizontaler Bahn:

$$9 + 0{,}15\, v^2 \text{ Pfund.}$$

Bei schlechtem Material und bei Seitenwinden wächst der Widerstand um 50 bis 80 %.

Durchschnittlich kann man den Widerstand eines Zuges auf horizontaler Bahn annehmen:

bei mässiger Fahrgeschwindigkeit $^1/_{200}$ } seines Gewichtes.
„ grosser „ $^1/_{100}$ }

Bei $\frac{1}{n}$ Steigung nimmt der Widerstand um $\frac{1}{n}$ des Gewichtes vom Zuge zu.

4) Die Belastung einer Axe soll 260 Centner (incl. Axe) als Maximum nicht überschreiten.

Die Belastung der Vorderaxe bei 3axigen Personenzug-Lokomotiven betrage mindestens $^1/_4$ des Maschinen-Gewichts. Ist die Hinteraxe Laufaxe, so erhält diese nicht unter $^1/_5$ des Lokomotiven-Gewichts. Eine gleiche Vertheilung der Last auf die gekuppelten Axen wird empfohlen.

Wagen.

1) Der Radstand betrage im Maximum für Bahnen, welche in freier Bahn vielfach Kurven enthalten, von:

240 bis 340 Meter	Radius	3,66 Meter,
300 „ 360 „	„	4,57 „
360 „ 460 „	„	5,03 „
460 „ 600 „	„	5,5 „
600 Meter	„	7,32 „

Für Güterwagen ist in der Regel 3,06 Meter Radstand als Maximum anzusehen.

Der Durchmesser der Räder betrage mindestens 0,9 Meter.

2) Axen von bestem Eisen können bei einem Durchmesser in der Nabe von:

101 Millim.	mit 75 Ctr.
114 „	„ 100 „
127 „	„ 130 „

Bruttolast im Maximum belastet werden.

Bei gussstählernen Axen können diese Belastungen um 30% erhöht werden.

Für Personenwagen betrage der Axendurchmesser 114 Millim.

Entfernung der Mitten beider Axenschenkel = 1,9 bis 2,0 Meter.

Stärke der Schenkel im Min.	67 Mm.	76 Mm.	82 Mm.
für eine Bruttolast pro Axe von	75 Ctr.	100 Ctr.	130 Ctr.

Für gussstählerne Axen können diese Belastungen um 30% erhöht werden.

Länge der Axenschenkel = $1^3/_4$- bis $2^1/_4$fachen Durchmesser.

3) Die normale Höhe des Mittelpunktes der Buffer über den Schienen 1,042 Meter. Horizontale Entfernung von Buffermitte zu Buffermitte 1,754 Meter.

4) Horizontale Entfernung der Nothketten 1,067 Meter. Nothketten, Zughaken und Buffer liegen in horizontaler Linie.

5) Güterwagen dürfen mit Einschluss der Schiebethüren, Tritte und vorspringenden Theile bis zur Höhe von 1,372 Meter über den Schienen die Breite von 2,745 Meter nicht überschreiten. In grösserer Höhe ist für den Kasten eine Breite von 3 Meter, für die vorspringenden Theile eine Breite von 2,897 Meter gestattet. Die Wagen sollen mit den höchsten Punkten ihres festen Oberbaues nicht mehr als 3,760 Meter über den Schienen hoch sein. Mittlere Höhe des Fussbodens 1,220 Meter.

Kurvenlehre.

Geometrie der Lage.

Erklärung der Begriffe und Zeichen.

Der Punkt (•), die Gerade (——), die Ebene (□), sind die einfachen Elemente der Geometrie der Lage.

Diese Elemente lassen sich zu zusammengesetzten Gebilden (Γ) verbinden, indem man eines derselben als Träger (T) eines Komplexes der anderen ansieht.

Jeder Punkt eines solchen Komplexes wirft nach einem andern beliebig anzunehmenden Punkte einen Strahl, welcher der Schein des ersten Punktes heisst.

Der Schein des ganzen Komplexes ist der Inbegriff aller dieser Strahlen.

Die Gesammtheit aller in einer —— liegenden • • heisst ein gerades Gebilde (-÷-), ein von 2 • • begrenzter Theil desselben eine Strecke (—ʃ—ʃ—).

Die Gesammtheit aller durch einen • gehenden und in ein und derselben Ebene liegenden Strahlen heisst ein Strahlenbüschel (✻).

Ein von 2 Strahlen begrenzter Theil desselben heisst ein vollkommener ebener Winkel (∢).

Vier Strahlen eines ❋ enthalten 2 Paar getrennte Strahlen.

Die Gesammtheit aller durch eine — gehenden Ebenen heisst ein Ebenenbüschel ([|]).

Ein von zwei Ebenen begrenzter Theil desselben heisst ein vollkommener Flächen-Winkel (Fl ∢).

Die Gesammtheit aller Punkte und Strahlen, die in einer ▢ enthalten sind, heisst ein ebenes System.

Die ▢ ist T desselben.

Die Gesammtheit aller Strahlen und Ebenen, die durch einen • im Raume denkbar sind, heisst ein Strahlenbündel.

Die Grundgebilde der I. Stufe

sind: Das gerade Gebilde, der Strahlenbüschel und der Ebenenbüschel.

Die Grundgebilde der II. Stufe

sind: Das ebene System und das Strahlenbündel.

Die Grundgebilde der III. Stufe

sind: Das räumliche System.

Jede — hat einen unendlich fernen Punkt.

Parallel-Linien (||) haben einen gemeinschaftlichen unendlich fernen •.

Unter 4 Punkten eines ∸ sind nur 2 Paar getrennte.

Um den unendlich fernen • einer — von ihren andern zu unterscheiden, werden erstere auch uneigentliche, letztere eigentliche • • genannt.

Von allen unendlich fernen • • • einer Ebene wird angenommen, dass sie in einer unendlich fernen geraden Linie liegen.

Von allen unendlich fernen • • und —— im Raum wird angenommen, dass sie in einer unendlich fernen □ liegen.

Zwei Grundgebilde heissen aufeinander bezogen, wenn jedem Elemente des einen ein Element des anderen zugewiesen ist.

Zwei solche Elemente heissen entsprechende oder homologe.

Wenn 2 Grund Γ auf ein 3tes bezogen sind, so sind sie auch auf einander bezogen.

Ein einfaches ebenes n-eck ist ein System von n • • • einer □ und den n ——, welche 2 aufeinander folgende • • verbinden.

Ein einfaches n-seit ist ein System von n —— und den n • •, in denen je 2 aufeinander folgende sich schneiden.

Jedes n-eck oder n-seit besteht aus 2 n-Elementen, nämlich Punkten und Geraden.

Das m^{te} und das $n + m^{te}$ Element werden einander gegenüberliegend genannt.

Ein vollständiges ebenes n-eck ist ein System von n-Punkten der □ mit ihren sämmtlichen Verbindungslinien (Seiten), d. h. ein einfaches n-seit mit allen Schnittpunkten der Seiten.

Als reciproke Begriffe stehen sich im Raume gegenüber:

•	und	□,
÷	„	[¦],
–ʃ–ʃ–	„	Fl ∢,
das ebene System	„	der Stahlenbündel,
——	„	——.

Als reciproke Begriffe stehen sich in der Ebene gegenüber:

•	und	——,
÷	„	❀,
–ʃ–ʃ–	„	∢,

ebenso im Strahlenbündel,

——	und	□,
❀	„	[¦].

Jeder Satz aus der Geometrie der Lage findet seine Ergänzung in einem andern, den man aus dem ersten ableitet, indem man obige Ausdrücke mit einander vertauscht.

Dieses führt zur Bildung der nachfolgenden Doppelsätze.

Punkte werden durch grosse lateinische Buchstaben bezeichnet, Linien durch kleine, Ebenen durch griechische.

$\overline{AB}$ bezeichnet die durch die Punkte A und B bestimmte Linie;

$\overline{\underline{aB}}$ die durch a und B bestimme Ebene;

$\overline{\alpha\beta}$ die durch α und β bestimmte Gerade;

$\dot{\alpha}\beta$ den durch α und β bestimmten Punkt;

$\wedge$ heisst perspektivisch;

$\overline{\wedge}$ heisst projektivisch;

$\sim$ heisst ähnlich;

∞ heisst unendlich;

$=$ heisst gleich.

Fundamental-Sätze

Mit Hilfe der angeführten reciproken Begriffe lassen

Doppel-

Zwei • • A und B bestimmen eine —— A B, nämlich ihre Verbindungslinie.

Eine —— a und ein nicht auf ihr liegender • B bestimmen eine □ $\overline{\text{a B}}$, welche durch beide hindurch geht.

Drei • • A B C, die nicht auf einer —— liegen, bestimmen eine □ $\overline{\text{A B C}}$.

Zwei ——, die einen • gemeinsam haben, liegen in einer □.

Diesen Sätzen zu Folge ist die Lösung der folgenden

Durch zwei • • eine —— zu legen.

Durch eine —— und einen • ausserhalb derselben eine □ zu legen.

Durch drei • • eine □ zu legen.

Durch zwei sich schneidende —— eine □ zu legen.

Sind vier • • A B C D gegeben und schneiden sich die Verbindungs —— $\overline{\text{AB}}$ und $\overline{\text{C D}}$, so liegen die • • in einer □ und es schneiden sich auch die —— $\overline{\text{A C}}$ und $\overline{\text{B D}}$, sowie $\overline{\text{A D}}$ und $\overline{\text{B C}}$.

Wenn von beliebig vielen —— je zwei sich schneiden, durch einen • gehen, so liegen alle in einer □.

der Geometrie der Lage.

sich folgende Sätze aufstellen:

Sätze.

Zwei □ □ α und β bestimmen eine Gerade $\overline{\alpha\beta}$, nämlich ihre Schnittlinie.

Eine —— a und eine nicht durch dieselbe hindurchgehende Ebene β bestimmen einen • $\alpha\beta$, welcher auf beiden liegt.

Drei □ □, die nicht durch eine —— gehen, bestimmen einen •.

Zwei Gerade, die in einer □ liegen, haben einen • gemein.

Aufgaben stets als ausführbar zu betrachten:

Die Schnittlinie von zwei □ □ zu finden.

Von einer □ und einer nicht in ihr liegenden —— den Schnitt • zu finden.

Von drei □ □ den Schnitt • zu finden.

Von zwei —— in einer □ den Schnitt • zu finden.

Sind vier □ □ $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ gegeben und schneiden sich die Schnittlinien $\overline{\alpha\beta}$ und $\overline{\gamma\delta}$, so gehen die □ □ durch einen und denselben • und es schneidet sich auch $\overline{\alpha\gamma}$ und $\overline{\beta\delta}$, sowie $\overline{\alpha\delta}$ und $\overline{\beta\gamma}$.

aber nicht alle:

in einer □ liegen, so gehen alle durch einen •.

Die Aufgabe: In einer ▢ durch einen in ihr gebeider gegebene — schneidet, löst sich auf zweierlei

Entweder verbinde man den Schnittpunkt der — und der ▢ mit dem gegebenen •,

Auf diese Aufgabe lassen sich die folgenden Auf-

Durch einen gegebenen • eine — zu ziehen, welche zwei gegebene —, die mit dem • nicht in einer ▢ liegen, schneide.

Man lege nämlich durch den gegebenen • und eine der gegebenen — eine ▢,

so ist die Aufgabe auf die

Eine — zu ziehen, welche drei gegebene schneidet.

Man nehme in einer der — einen • an und suche nach den Angaben der vorigen Aufgabe eine —, welche diesen • geht.

Werden zwei ebene Systeme dadurch auf einander bezogen, dass man sie als Schnitte eines und desselben Strahlenbündels betrachtet, so liegen je zwei einander entsprechende Elemente (• oder —) der Systeme auf einem und demselben Elemente (— oder ▢) des Strahlenbündels. Die Schnittlinie der beiden ▢ ▢ fällt mit ihrer entsprechenden zusammen und entspricht sich selbst. Dasselbe gilt von jedem in dieser — befindlichen •. Die beiden Systeme haben also ein ÷ entsprechend gemein.

Je zwei • • einer ▢ bestimmen eine —.
Je zwei Strahlen eines Bündels bestimmen eine ▢.

Eine Kurve kann

Als Inbegriff aller auf ihr liegenden • •.

Eine konische Fläche im Strahlen-

Als Inbegriff aller in ihr liegenden Strahlen.

gebenen • eine —— zu ziehen, welche eine ausserhalb
Art:

oder man lege durch die —— und den gegebenen • eine □ und suche die Schnittlinie mit der gegebenen □.

gaben zurückführen:

In einer gegebenen □ eine —— zu ziehen, welche zwei gegebene ——, die mit der □ nicht einen und denselben Schnitt • gemein haben, schneide.

Man bestimme nämlich den Schnitt • der gegebenen □ mit einer der gegebenen ——,

vorangehende zurückgeführt.

Eine —— zu ziehen, welche drei gegebene scheidet.

Man lege durch eine der —— eine □ und suche nach den Angaben der vorigen Aufgabe eine ——, welche in dieser Ebene liegt, und die beiden andern —— scheidet.

Werden 2 Strahlenbündel dadurch auf einander bezogen, dass man sie als Scheine eines und desselben ebenen Systems betrachtet, so gehen je zwei entsprechende Elemente (—— oder □) der Bündel durch ein und dasselbe Element (• oder ——) des ebenen Systems. Der gemeinsame Strahl der Bündel, welcher ihre Mittelpunkte verbindet, fällt mit seinem entsprechenden zusammen oder entspricht sich selbst. Dasselbe gilt von jeder durch diesen Strahl gehenden □. Die beiden Strahlenbündel haben also einen [|] entsprechend gemein.

Je zwei —— einer □ bestimmen einen •.

Je zwei □ □ eines Bündels bestimmen einen Strahl.

aufgefasst werden:

Als Inbegriff aller sie einhüllenden Geraden (Tangenten).

bündel kann aufgefasst werden:

Als Inbegriff aller sie einhüllenden Ebenen (Berührungsebenen).

Vollständiges ebenes n eck.

In jedem Eckpunkte schneiden sich n — 1 Seiten.

Die Anzahl aller Seiten ist $= \frac{n(n-1)}{2}$.

Jedes vollständige n eck oder n seit

Figur 1.

Ein vollständiges 4eck enthält 6 Seiten. Darunter sind 3 Paar Gegenseiten, nämlich $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$, $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$. Es enthält ferner 3 einfache 4ecke, nämlich A B C D, A C D B, A D B C.

Ein vollständiges n kant ist ein System von n Strahlen im Strahlenbündel mit ihren sämmtlichen Verbindungsebenen.

Ein vollständiges räumliches n eck besteht aus n Punkten (Eckpunkten), den Geraden (Kanten), deren jede 2, und den Ebenen (Flächen), deren jede 3 der n • • verbindet.

Das Beziehen vollständiger n ecke

Harmonische

Wenn 2 auf einander bezogene △ △ ABC und $A_{,}B_{,}C_{,}$ in verschiedenen □ □ liegen und je 2 entsprechende Seiten (A B und $A_{,}B_{,}$) sich schneiden, so bestimmen die Ebenen der 3 Paare entsprechender Seiten ein 3 kant, von welchem die beiden △ △ Schnitte sind. Die Verbindungslinien $\overline{AA}$, $\overline{BB}$, $\overline{CC}$, von 2 entsprechenden Eck • •, schneiden sich daher in einem •, nämlich im Mittelpunkte (Spitze) der 3 kants.

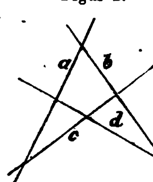
Sätze.

Vollständiges ebenes n seit.

Auf jeder Seite liegen n — 1 Eckpunkte. Die Anzahl aller Eckpunkte ist $= \frac{n(n-1)}{2}$.

enthält mehrere einfache n ecke resp. n seite.

Figur 2.



Ein vollständiges 4 seit enthält 6 Eckpunkte. Darunter sind 3 Paar Gegenpunkte, nämlich $\dot{a}\,b$ und $\dot{c}\,d$, $\dot{a}\,c$ und $\dot{b}\,d$, $\dot{a}\,d$ und $\dot{b}\,c$.

Ein vollständiges n seit im Strahlenbündel ist ein System von n Ebenen des letzteren, mit ihren sämmtlichen Schnittlinien (Kanten).

Ein vollständiges n flach besteht aus n □ □, den Geraden (Kanten), in denen je 2, und den • • (Eckpunkten), in denen je 3 der n Ebene sich scheiden.

---

und n seite auf einander.

Gebilde.

Wenn 2 auf einander bezogene 3 kante verschiedenen Strahlenbündeln angehören und je 2 entsprechende Kanten sich schneiden, so bestimmen die 3 Schnittpunkte ein △, von welchem die 2. Dreikante Scheine sind. Die Schnittlinien von je 2 entsprechenden Ebenen der Dreikante liegen daher in der Ebene dieses △, dessen Seiten sie sind.

Mit Hilfe des vorigen Satzes

Wenn 2 auf einander bezogene vollständige 4ecke in verschiedenen Ebenen liegen, deren Schnittlinie u durch keinen der 8 Eckpunkte geht und 5 Seiten des einen 4ecks die entsprechenden Seiten des andern (auf u) schneiden, so sind beide 4ecke Schnitte ein und desselben vollständigen 4kants, daher auch das 6te Seitenpaar sich auf u schneidet.

Der Satz links bleibt auch giltig, wenn die □ der 4ecke unendlich ferne Linie.

Figur 3.

Demzufolge schneiden sich eines 4ecks KLMN in 4 Punk- Die • • AB C D heissen harseiten des vollständigen 4ecks.

Wird in einer anderen oder Gegenseiten durch 3 harmoni- das vierte Paar der Gegenseiten Punkt A und C sind durch

Aus einem nicht in der □ des vollständigen Vier- 4kant projecirt; die 4 harmonischen • • aber durch vier Jede durch das 4kant gelegte □ schneidet dasselbe in denselben 4 • • scheiden sich aber auch die Gegenseiten Sie sind daher harmonische • •. Es wird daher jeder gehende □ oder —— in 4 harmonischen • • geschnitten.

Werden 4 harmonische • • aus einer Axe projecirt, so die nicht durch die Axe geht, scheidet zu Folge des

Vier harmonische • • werden aus jeder —— durch 4 harmonische □ □ und aus jedem • durch 4 harmonische Strahlen projecirt.

ergibt sich der nachfolgende:

Wenn 2 auf einander bezogene vollständige 4seite verschiedenen Strahlenbündeln angehören, deren gemeinschaftlicher Strahl in keiner der 8 Seiten liegt, und 5 Kanten des einen 4seits die entsprechenden Kanten des anderen schneiden, so sind beide 4seite Scheine eines und desselben vollständigen ebenen 4seits, daher auch ihre übrigen Kanten sich schneiden.

zusammenfallen oder || sind, im letzten Falle ist u eine

die Seiten $\overline{KL}$ und $\overline{NM}$, $\overline{KN}$ und $\overline{LM}$, $\overline{LN}$ und $\overline{KM}$

ten A B C D einer Geraden u.

monische Punkte, in ihnen schneiden sich also die Gegen-

derselben □ ein zweites 4eck konstruirt, wovon 3 Paar

sche Punkte (A B C) gehen, so muss zu Folge des Vorigen

sich in dem vierten harmonischen Punkt (D) schneiden.

B und D harmonisch getrennt.

ecks belegenen • wird dasselbe durch ein vollständiges

Strahlen, die ein harmonisches ✤ genannt werden.

einem Viereck und die harmonischen ✤ in 4 • •. In

des 4ecks.

harmonische ✤ durch jede nicht durch seinen Mittel •

entsteht ein harmonisches Ebenenbüschel. Jede Ebene,

vorigen die 4 harmonischen □ □ in harmonischen Strahlen.

Vier harmonische □ □ werden von jeder — in 4 harmonischen • • und von jeder □ in 4 harmonischen Strahlen geschnitten.

Doppel-

Vier harmonische

aus jedem • durch 4 harmonische □ □ projecirt.

Aufgabe. Zu 3 harmonischen Elementen das 4te

Sind die Elemente • •, so konstruire man das zu- oder Ebenen eines Büschels, so schneide man den 4ten harmonischen •.

Werden 3 □ □ $\alpha \beta \gamma$ eines [|] von beliebigen Transversalen geschnitten, und wird zu den 3 Schnitt • • der 4te harmonische • gesucht, so liegen alle diese 4ten • • in einer □ δ, welche zu $\alpha \beta \gamma$ die harmonische ist.

Ist A B C D ein harmonisches Gebilde, so sind nicht sondern auch D C B A, D A B C, B C D A und B A D C.

Dasselbe gilt für harmonische Strahlen und Ebenen.

Durch 2 —— (a und b) und einen • ausserhalb 1, ist eine dritte —— bestimmt, welche durch den Schnittpunkt o geht und jeden • (3) enthält, welcher durch die gegebene —— a und b von • 1 harmonisch getrennt ist. Diese dritte —— ist nämlich der harmonische Gegenstrahl von 1•0 Figur 4.

Im vollständigen ebenen 4eck sind je 2 Gegenseiten ($\overline{KM}$ und $\overline{LN}$) durch die beiden • • (A und C), in denen die übrigen Gegenseiten paarweise sich schneiden, harmonisch getrennt. Figur 3.

Wenn in einer —— 2 • • A und C (Figur 3) von 4 harmonische • auf dieser Geraden in unendlicher

Strahlen werden
von jeder □ in 4 harmonischen • • geschnitten.

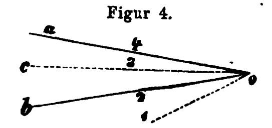
zu finden:

gehörige vollständige 4eck, sind sie dagegen Strahlen denselben durch eine —— und suche zu den 3 Schnitt • •

Werden 3 • • • A B C eines ÷ aus beliebigen Axen projecirt und wird für jede Axe zu den 3 projecirenden □ □ die 4te harmonische gesucht, so gehen alle diese 4ten Ebenen durch einen • D, welcher zu A B C harmonisch ist.

nur A D C B, C B A D und C D A B ebenfalls solche,

Figur 4.



Durch eine —— b und zwei • • ausserhalb (1 und 4) ist ein dritter • (3) bestimmt, welcher auf der Verbindungslinie von • 1 und 4 liegt und durch welchen jede —— (c) geht, welche durch die gegebenen Punkte von der gegebenen —— (b) harmonisch ist.

Im vollständigen ebenen 4seit sind je 2 Gegen • • (A und C) durch die beiden —— ($\overline{KM}$ und $\overline{LN}$), welche die übrigen Gegen • • paarweise verbinden, harmonisch getrennt.

einem dritten B gleichen Abstand haben, so liegt der Entfernung und der Strahl zu diesem • ist || der ——.

Zwei Seiten eines △, die die Grundlinie halbirende Grundlinie sind daher harmonische Strahlen. (a. b. c. d.)

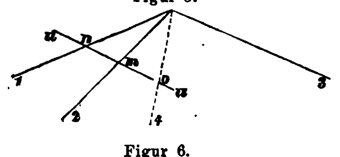
Im gleichschenkeligen △ steht b senkrecht auf der bildeten Neben ∢ durch b und d halbirt. Daraus folgt:

Die Halbirungslinien zweier Neben ∢ sind durch Umgekehrt werden, wenn von 4 harmonischen Strahlen den andern beiden Strahlen halbirt.

Wird ein harmonischer Strahlenbüschel a b c d durch halbirt von den 3 Schnittpunkten mit den übrigen Strah-

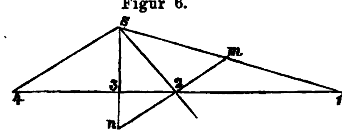
Aufgabe. Zu 3 • • oder Strahlen den 4ten

Figur 5.



Sind die gegebenen n m = m o und ziehe

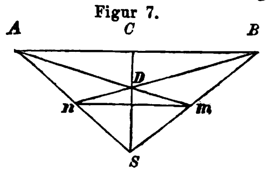
Figur 6.



Sind die gegebenen kührlich durch 2, so ist • 4 der ge-

Aufgabe. Zu der Geraden AB

Figur 7.



Man halbire $\overline{AB}$ in C und Man ziehe ferner n B beliebig Soll die ∥ durch einen be- längerung von A n anzuneh-

Sätze.

Transversale und die durch die Spitze gehende ∥ zur

Grundlinie und auf d, auch werden die von a und c ge-

die Schenkel derselben harmonisch getrennt.
2 getrennte senkrecht auf einander stehen, die ∢ zwischen

eine Parallele u zu einem seiner Strahlen geschnitten, so
len der eine der Abstand zwischen den beiden andern.

harmonischen zu finden. Figur 5 und 6.

Elemente Strahlen 1. 2. 3., so lege man u ∥ s 3, mache
s 4, so ist dieses der gesuchte Strahl.

Elemente • • 1. 2. 3., so ziehe man m n, Figur 6, will-
mache 2 m = 2 n und bestimme • s. Zieht man s 4 ∥ m n,
suchte Punkt.

eine ∥ zu ziehen. Figur 7.

ziehe von einem beliebigen • S die Strahlen $\overline{AS}$, $\overline{CS}$, $\overline{BS}$.
und Am durch • D, so ist n m ∥ $\overline{AB}$.
stimmten • n gehen, so ist S willkührlich in der Ver-
men, n B dagegen durch die • • n und B bestimmt.

Doppel-

Figur 8.

A B C D

Zwischen den Abschnit- einer —— gebildet werden. Strecke A C ist durch den in ihr gelegenen Punkt B in welcher von B harmonisch getrennt ist.

Projektivische Verwandtschaft

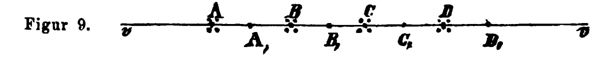
Zwei ungleichartige Grundgebilde liegen $\wedge$, wenn das gebilde liegen $\wedge$, wenn sie entweder Schnitte oder Scheine

Zwei Grundgebilde sind $\overline{\wedge}$, wenn sie so auf einander je 4 harmonischen Elementen des andern entsprechen.

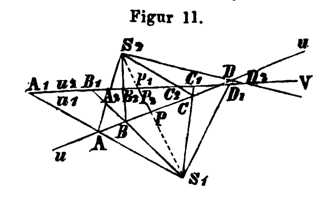
Wenn 2 Gebilde zu einem 3ten $\overline{\wedge}$ sind, so sind sie

Zwei gleichartige $\overline{\wedge}$ Grundgebilde können auch in z. B. die geraden Gebilde A B C D und A, B, C, D, (Figur 9).

Figur 9.



Figur 11.



Sind in einer □ zwei ✻ S_1 und S_2 (Figur 10) gegeben, welche Scheine eines und desselben ÷ u, also $\wedge$, sind, und schneidet man dieselben durch eine —— v, so erhält man in dieser 2 $\wedge$ gerade Gebilde u_1 und u_2,

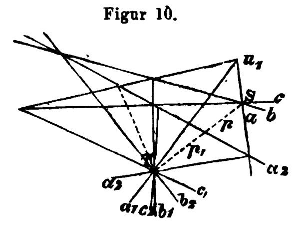
ten (Figur 8), welche durch vier harmonische Punkte auf
besteht die Proportion A B : C B = A D : D C, d. h. die
eben dem Verhältniss getheilt, wie durch den äusseren • D,

zwischen einförmigen Grundgebilden.

eine ein Schnitt des andern ist; zwei gleichartige Grund-
ein und desselben dritten Grundgebildes sind.
bezogen sind, dass je 4 harmonische Elemente des einen

auch zu einander $\overline{\wedge}$.
einander liegen, so dass sie denselben Träger haben, wie
welche die Gerade v v̄ zum Träger haben.

Figur 10.



Sind in einer □ zwei ÷ u₁ und u₂ (Figur 11) gegeben, welche Schnitte eines und desselben ✻ S, also perspektivisch sind, und projecirt man dieselbe aus einem • T der □, so wird dieser der Mittel • von 2 $\overline{\wedge}$ Strahlen-

welche die beiden Schnitt • • von v mit u und mit $\overline{S_1 S_2}$ entsprechend gemein haben. Diese beiden • • fallen zusammen, wenn $\overline{S_1 S_2}$ durch $\dot{u}$ v geht.

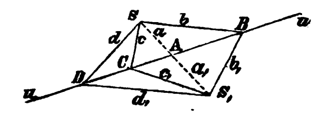
In den Figuren sind A_1 und A_2, B_1 und B_2, C_1 und C_2 entsprechende • •,

Wenn 2 $\overline{\wedge}$ einförmige Grundgebilde 3 Elemente ent-entsprechend gemein und sind also identisch mit einander.

Zwei $\overline{\wedge}$ einförmige Grundgebilde können daher höchnicht zusammenfallen sollen.

Wenn ein ÷ zu einem Büschel, oder ein Strahlendes ersten Gebildes in den ihnen entsprechenden Elementen des letzteren.

Figur 12.



Wenn 2 $\overline{\wedge}$ Strahlenbüschel S und S, (Figur 12), welche in einerlei ☐ liegen, aber nicht konzentrisch sind, den Strahl a oder a,, welcher ihre Mittelpunkte verbindet, entsprechend gemein haben, so sind sie Scheine ein und desselben ÷ u und somit ⋀. Denn verbindet man B und C durch eine —, so sind die beiden ÷, in welchen u die beiden Büschel schneidet, identisch, weil sie $\overline{\wedge}$ sind und 3 • • entsprechend gemein haben.

Wenn 2 $\overline{\wedge}$ [|], deren Axen sich schneiden, die Verbindungs ☐ dieser Axen entsprechend gemein haben, so sind sie Scheine ein und desselben ✤ und daher ⋀.

büscheln, welche die beiden Verbindungslinien von T mit S und mit $u_1 u_2$ entsprechend gemein haben. Diese beiden Strahlen fallen zusammen, wenn $u_1 u_2$ auf $\overline{ST}$ liegt.
a_1 und a_2, b_1 und b_2, c_1 und c_2 entsprechende Strahlen.

sprechend gemein haben, so haben sie alle ihre Elemente

stens 2 Elemente entsprechend gemein haben, wenn sie

büschel zu einem Ebenenbüschel $\overline{\wedge}$ ist und 3 Elemente des letzteren liegen, so ist das erste Gebilde ein Schnitt

Figur 13.

Wenn 2 $\overline{\wedge}$ ÷ Gebilde u und u, (Figur 13), welche sich schneiden, ihren Schnittpunkt A oder A, entsprechend gemein haben, so sind sie Schnitte ein und desselben ❈ S und. somit perspektivisch. Denn verbindet man B, und B, sowie C, und C, und schneiden sich diese —— m S, so sind die beiden ❈, durch welche aus S die ÷ u und u, projecirt werden, identisch, weil sie $\overline{\wedge}$ sind und 3 Strahlen gemein haben.

Wenn 2 $\overline{\wedge}$ ❈, welche konzentrisch sind, aber in verschiedenen ☐ liegen, die Schnittlinie dieser ☐ ☐ entsprechend gemein haben, so sind sie Schnitte ein und desselben [|] und daher $\wedge$.

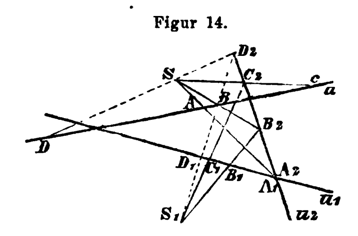
Wenn 2 $\overline{\wedge}$ ✻ S und S, (Figur 12) verschiedene Mittelpunkte haben, und irgend 3 | b c d des einen von denen ihnen entsprechenden b, c, d, des andern in 3 • BCD geschnitten werden, welche auf einer —— u liegen. so sind die ✻ Scheine des ÷ u also $\wedge$ und alle Schnittpunkte von je zwei entsprechenden | liegen auf u.

Zwei $\overline{\wedge}$ ✻, welche schief in einer ☐ liegen, schneiden einander in einer Kurve II[ter] Ordnung, indem jeder Strahl des einen Büschels den entsprechenden des andern Büschels in einem • dieser Kurve schneidet.

In keiner —— liegen mehr wie 2 • • einer Kurve II[ter] Ordnung.

Zwei einförmige Grundgebilde können stets in solcher 3 Elementen des einen 3 beliebige Elemente des anderen kann dann das entsprechende des andern Gebildes ein-

Figur 14.



Da u, $\wedge$ zu u2 und u2 $\wedge$ zu u ist, so geht hieraus Erstes und Letztes in einer Reihe von Gebilden betrachtet vorhergehenden $\wedge$ liegt.

Sätze.

Wenn 2 $\overline{\wedge}$ ∸ u und $u_,$ in verschiedenen — liegen und irgend 3 von den |, deren jeder ein Paar entsprechender • • B und $B_,$, C und $C_,$, D und $D_,$ verbindet, sich in einem und demselben • S schneiden, so sind die ∸ u und $u_,$ Schnitte des ✻ S, also $\wedge$, und alle Verbindungslinien von 2 entsprechenden | gehen durch S.

Zwei $\overline{\wedge}$ ∸, welche schief in einer □ liegen, projeciren einander durch einen ✻ IIter Ordnung, indem jeder • des einen den entsprechenden • des andern ∸ durch einen | dieses ✻ projecirt.

Durch keinen • gehen mehr als 2 | eines ✻ IIter Ordnung.

Weise $\overline{\wedge}$ auf einander bezogen werden, dass man irgend Grundgebildes zuweist; zu jedem 4ten Elemente des einen deutig bestimmt werden.

Sollten z. B. die ∸ u und $u_,$ so auf einander bezogen werden, dass den 3 • • A B C die • • $A_,$ $B_,$ $C_,$ zugewiesen werden, so projecire man u aus einem in $\overline{AA_,}$ belegenen • S auf u_2. Es müssen sich alsdann $\overline{C_,C_2}$, $B_,B_2$, sowie alle andern Verbindungslinien von je 2 entsprechenden • •, in S, schneiden, weil $u_,$ mit $u_,$ $\wedge$ ist, da beide den Schnittpunkt $u_,u_2$ mit $A_,$ gemein haben. Der entsprechende • von D auf $u_,$ wird gefunden, indem man D aus S nach u_2 projecirt und die Gerade $D_2 S$, zieht. Ihr Durchschnitts • mit $u_,$ ist der entsprechende • $D_,$.

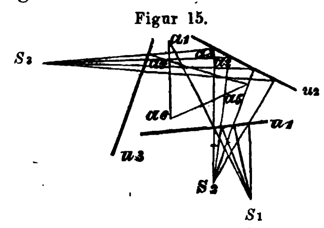
hervor, dass 2 $\overline{\wedge}$ einförmige Grundgebilde immer als werden können, deren jedes zu dem folgenden und dem

Doppel-

Wird ein ÷ durch Bewegung eines seiner • • P beschrieben, so durchläuft der entsprechende • P, auf einem andern ÷ einen entsprechenden Weg. Diese Wege haben in beiden Gebilden entweder gleiche oder entgegengesetzte Richtung. Im ersten Falle heissen die Gebilde „einstimmig $\overline{\wedge}$“, im zweiten Falle „entgegengesetzt $\overline{\wedge}$“.

Da im entgegengesetzten $\overline{\wedge}$ Gebilde die sich bemüssen, so haben dieselben 2 Elemente entsprechend ge-entsprechenden —∫—∫— oder ∢ des anderen liegt. Die-entsprechend gemein.

Figur 15.



Drehen sich die Seiten a_1 a_2 ... a_n eines veränderlichen einfachen n ecks der Reihe nach um n feste • • S_1 S_2 .. S_n, während n—1 Eckpunkte $\grave{a}_1 a_2$ $\grave{a}_2 a_3$ ... $\grave{a}_{n-1} a_n$ desselben sich auf die festen —— u_1 u_2 ... u_{n-1} bewegen, so beschreibt der letzte Eckpunkt $\grave{a}_n a_1$ und jeder andere Schnittpunkt der Seiten des n ecks entweder eine Kurve II^ter^ Ordnung oder eine ——, und zwar eine Gerade u. A. dann, wenn die festen Drehpunkte S_1 S_2 ... alle auf einer —— g liegen.

Die Seiten a_1 a_2 ... beschreiben nämlich um S_1 S_2 ... Strahlenbüschel, von denen jeder zu dem Folgenden $\wedge$ liegt, Figur 15.

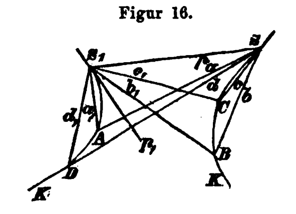
Sätze.

Ein ❋ oder [|] kann durch Drehung eines | resp. einer Ebene entstanden gedacht werden.

Zwei auf einander bezogene ❋ oder [|] können daher einstimmig oder entgegengesetzt $\overline{\wedge}$ sein, je nachdem der Drehsinn in beiden = oder entgegengesetzt ist.

wegenden Elemente nothwendig 2 mal in einander fallen mein, wenn eine —ʃ—ʃ— resp. ⊀ des einen ganz in der selben haben öfters ein, manchmal auch kein Element

Figur 16.



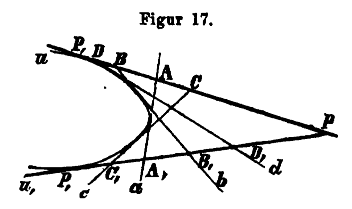
Durchlaufen die Eckpunkte $A_1 A_2 \dots A_n$ eines veränderlichen einfachen n ecks der Reihe nach n feste Gerade $u_1 u_2 \dots u_n$, während n—1 Seiten desselben sich um die festen •, • $S_1 S_2 \dots S_{n-1}$ drehen, so beschreibt die letzte Seite $\overline{A_n A_1}$ und ebenso jede Diagonale des n ecks entweder einen ❋ IIter Ordnung, oder sie dreht sich um einen festen •, und zwar tritt der letzte Fall u. A. dann ein, wenn die —— $u_1 u_2 \dots$ sich alle in einem • schneiden.

Die Endpunkte $A_1 A_2 \dots A_n$ beschreiben nämlich in $u_1 u_2 \dots$ ÷, deren jedes zum Folgenden $\wedge$ liegt, Figur 15.

Folglich sind je 2 dieser Büschel und namentlich der erste und letzte $\overline{\wedge}$, und erzeugen eine Kurve II^ter Ordnung, wenn sie nicht etwa $\wedge$ liegen; dieser Fall tritt u. A. ein, wenn $S_1 S_2 \ldots S_n$ auf einer —— g liegen.

Wenn 2 $\overline{\wedge}$ [|], deren Axen sich schneiden, nicht $\wedge$ liegen, so bilden die sämmtlichen Schnittlinien entsprechender □ □ eine Kegelfläche II^ter Ordnung, welche mit keiner □ mehr als 2 dieser Schnittlinien gemein hat. Der Schnittpunkt der Axen, durch welchen alle solche Strahlen der Kegelfläche hindurchgehen, heisst der Mittelpunkt derselben.

Figur 17.



In Figur 17 liefern die • • A B C D und A, B, C, D, Ebenen O a, O b, O c, O d, den [|] II^ter Ordnung bilden.

Jede Kurve und jeder ❋ II^ter Ordnung wird aus einem nicht in derselben □ gelegenen • durch eine Kegelfläche resp. einen [|] II^ter Ordnung projecirt.

Folglich sind je 2 dieser Gebilde und also auch das erste und letzte $\overline{\wedge}$, und erzeugen einen Büschel IIter Ordnung, wenn sie nicht etwa $\wedge$ liegen. Dieser letzte Fall tritt u. A. ein, wenn die $\div$ u_1 u_2 . . . u_1 sich in einem • P schneiden.

---

flächen IIter Ordnung.

Wenn 2 $\overline{\wedge}$ ❃, deren □ □ sich schneiden, konzentrisch, aber nicht $\wedge$ liegen, so bilden die sämmtlichen Verbindungsebenen entsprechender Strahlen einen [|] IIter Ordnung, welcher mit keinem [|] Iter Ordnung mehr als 2 □ □ gemein hat. Der Mittel • der ❃, durch welchen alle □ des Büschels IIter Ordnung hindurchgehen, heisst der Mittel • dieses [|].

Die Richtigkeit dieses Doppelsatzes erhellt sofort, wenn man Figur 16 und 17 aus einem nicht in der □ der Figuren belegenen • z. B. dem Auge projecirt.

In Figur 16 liefern die ❃ S und S_1 aus einem solchen • O projecirt die $\wedge$ [|]. Die — A O, D O u. s. w. sind dann die Schnittlinien der □ □ und zugleich die Strahlen der Kegelfläche, deren Mittel • O ist.

aus O projecirt die konzentrischen ❃, während die

Jede Kegelfläche und jeder [|] IIter Ordnung wird von einer nicht durch den Mittel • gehenden □ in einer Kurve resp. ❃ IIter Ordnung geschnitten.

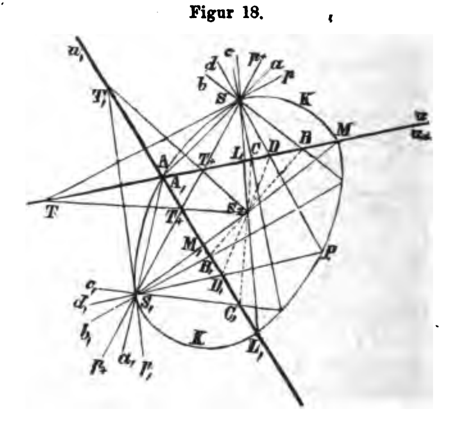
Die Kurve k II^ter^ Ordnung (Figur 16) geht durch die Mittel • • der ❋ S und S,. Denn dem Strahle p von S entspricht, da die ❋ nicht ∧ liegen, irgend ein anderer | von S,, etwa p,. Der Schnitt • von p p,, d. h. • S,, gehört also der Kurve k an.

Dem gemeinschaftlichen | p (Figur 16) von 2 ⊼ ❋ entspricht die Tangente p, derjenigen Kurve II^ter^ Ordnung, in welcher die Büschel sich schneiden.

Aufgabe.

Zwei ⊼ ❋ S und S, seien durch 3 Paar entsprechender | a a,, b b,, c c, gegeben; es sollen beliebig viele • • der Kurve II^ter^ Ordnung, in welcher sich die | schneiden, konstruirt werden.

Figur 18.



Sätze.

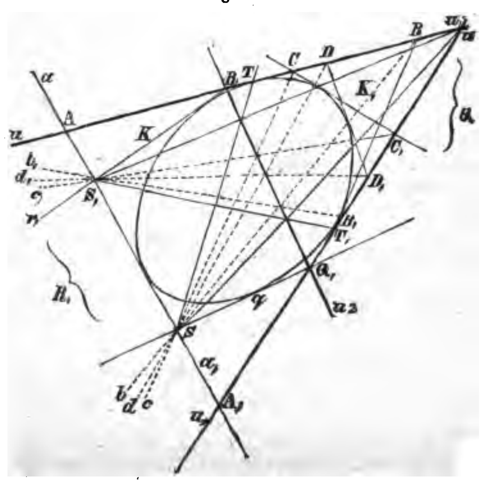
Der Strahlenbüschel K II^{ter} Ordnung (Figur 17) enthält auch die — u und u,, in welcher die ÷ liegen. Denn dem Schnittpunkt P von u und u, entspricht, weil die ÷ nicht ⋀ liegen sollen, irgend ein anderer • P, im ÷ u u, die Verbindungslinie $\overline{\text{P P}}$,, d. h. u, gehört also dem Büschel K an.

Dem Schnitt • P von 2 $\overline{⋀}$ ÷ (Figur 17) entspricht in jedem derselben ein Berührungspunkt desjenigen Büschels II^{ter} Ordnung, durch welchen die ÷ einander projeciren.

Aufgabe.

Zwei ÷ u u, seien durch 3 Paar entsprechender • • A A,, B B,, C C, gegeben; es sollen beliebig viele | des Büschels II^{ter} Ordnung, durch welches die ÷ einander projeciren, konstruirt werden.

Figur 19.



Durch den Schnittpunkt à a, von irgend 2 entsprechenden | der ⋀ ❈ S und S, lege man die —— u und u, von denen u den ❈ S in einem ∸ A B C und u, den ❈ S, in einem ∸ A, B, C, schneide. Als Schnitte $\overline{\wedge}$ ❈ sind diese ∸ auch zu einander $\overline{\wedge}$. Sie liegen aber auch ⋀, weil in ihrem Schnittpunkte 2 entsprechende • • A und A, zusammenfallen. Sie sind daher Schnitte desjenigen ❈ S_2, in dessen Mittel • die | $\overline{BB}$, $\overline{CC}$, sich schneiden. Figur 18.|

Um zu irgend einem | d des Büschels S den entsprechenden d, von S, zu finden, projecirt man den Schnitt • D aus S_2 nach D, und zieht D, S,. Dieses ist der gesuchte | d und • d d, oder P ein • der Kurve k.

Hiermit sind folgende

Auf jedem | von S oder S, den zweiten von S und S, verschiedenen Schnitt • mit k zu finden.

In den Mittel • • von 2 $\overline{\wedge}$ ❈ Tangenten p und p,, Figur 18, der von ihnen erzeugten Kurve II^ter^ Ordnung zu ziehen.

Auf irgend einer —— u, welche eine Kurve K (Figur 18) in einem gegebenen • A schneidet, den zweiten Schnittpunkt M mit k zu finden.

Lehrsatz des Pascal.

In jedem einfachen 6eck, welches einer Kurve II^ter^ Ordnung eingeschrieben ist, schneiden sich die Gegenseiten in 3 Punkten einer Geraden.

Denn in Figur 18 ist S P S, M A L das 6eck, L P und M A,, P S, und A L,, S, M und S, L, die Gegenseiten und D S_2 D, die Schnitt • •.

Eine Kurve II^ter^ Ordnung wird aus beliebigen 2 ihrer Punkte durch 2 $\overline{\wedge}$ ❈ projecirt.

In der Verbindungs —— A A, von irgend 2 entsprechenden • • der ⋀ ∸ u und u, (Figur 19) nehme man die Mittel • • S und S, von 2 ✱ an, von denen S das ∸ A B C und S, das ∸ A, B, C, projecire. Als Scheine $\overline{\wedge}$ ∸ sind die ✱ S und S, auch zu einander $\overline{\wedge}$. Sie liegen aber auch ⋀,. weil in der Verbindungslinie S S, ihrer Mittel • • 2 entsprechende | a und a, zusammenfallen. Sie sind also Scheine desjenigen ∸, welchem die Schnitt • • b b, c c, angehören.

Um zu irgend einem • D von u den entsprechenden D, von u, zu finden, schneide man die —— $\overline{DS}$ oder d durch u_2 und projecire den Schnitt • aus S_2 durch den Strahl d, auf u,. Die Projektion d, u, ist der gesuchte • D,. Der | D D, gehört zu dem Büschel II^ter Ordnung k.

Aufgaben gelöst:

Durch jeden • von u oder u, den zweiten von u oder u, verschiedenen Strahl des Büschels K zu finden.

Auf 2 $\overline{\wedge}$ ∸, die einen Büschel II^ter Ordnung erzeugen, die Berührungs • • F (Figur 19) zu finden.

Durch irgend einen • S, welcher auf einem gegebenen Strahl des Büschels K (Figur 19) liegt, den zweiten Strahl q dieses Büschels zu ziehen.

Lehrsatz des Brianchon.

In jedem einfachen 6eck, welches aus 6 Strahlen eines Büschels II^ter Ordnung gebildet wird, schneiden sich die 3 Hauptdiagonalen in einem Punkte.

Denn in Figur 19 ist S S, R C C, Q, ein 6eck obiger Art, S, C,, R Q, C S die Hauptdiagonalen x der Schnittpunkt.

Ein ✱ II^ter Ordnung wird durch beliebige 2 seiner Strahlen in 2 $\overline{\wedge}$ ∸ geschnitten.

4 • • einer Kurve II^{ter} Ordnung heissen harmonische • •, wenn sie aus irgend einem und folglich aus jedem fünften • der Kurve durch harmonische | projecirt werden.

Durch jeden • einer Kurve II^{ter} Ordnung geht eine Tangente.

Jede Kurve II^{ter} Ordnung wird daher von einem nung umhüllt ein System von Berührungs • •.

Zwei Kurven II^{ter} Ordnung fallen zusammen, wenn sie entweder 5 • • oder 4 • • und die Tangente in einem derselben S$_{,}$, oder 3 • • und die Tangenten in S und S$_{r}$ gemein haben.

Wenn in einem 6eck, welches einer Kurve II^{ter} unbegrenzt nähern, so wird die 6 Seite ∞ klein und fällt

Wenn in einem 6eck, dessen Seiten aus | eines sich unbegrenzt nähern, so fällt ein Berührungs • mit

Wenn man auf diese Weise aus dem 6eck 5ecke, selben folgende Lehrsätze:

Figur 20.

In jedem einer Kurve II^{ter} Ordnung eingeschriebenen 5eck schneiden sich je 2 nicht auf einander folgende Seiten und die fünfte Seite mit der Tangente t des ihr gegenüber liegenden Eck • in 3 • • einer —— u. Figur 20.

Hiernach sind folgende

Aufgabe. Wenn 5 • • einer Kurve II^{ter} Ordnung gegeben, sind die Tangenten an dieselben zu ziehen.

Sätze.

4 Strahlen eines Büschels II^ter^ Ordnung heissen harmonische Strahlen, wenn sie durch irgend einen und folglich durch jeden fünften Strahl des Büschels in 4 harmonischen • • geschnitten werden.

Auf jedem Strahl eines Büschels II^ter^ Ordnung liegt ein Berührungs • desselben.

System von Tangenten eingehüllt und jeder ❋ II^ter^ Ord-

Zwei ❋ II^ter^ Ordnung fallen zusammen, wenn sie entweder 5 | oder 4 | und den Berührungs • in einem derselben u oder 3 | in die Berührungs • • in u und u, gemein haben.

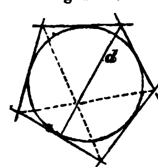
Ordnung eingeschrieben ist, 2 benachbarte Eck • • sich mit der Tangente zusammen.

Büschels II^ter^ Ordnung bestehen, 2 benachbarte Seiten einem Eck • zusammen.

4ecke und 3ecke entstehen lässt, so ergeben sich für die-



Figur 21.

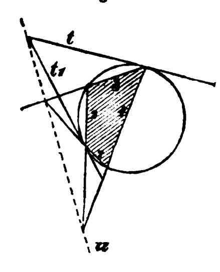


In jedem 5eck, dessen Seiten Strahlen eines Büschels II^ter^ Ordnung sind, schneiden sich die Diagonalen mit der Transversale d aus dem fünften Eck • nach dem gegenüberstehenden Berührungs • in einem Punkte. Figur 21.

Aufgaben zu lösen:

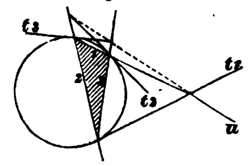
Aufgabe. Wenn 5 | eines Büschels II^ter^ Ordnung gegeben, sind die Berührungs • • zu finden.

Figur 23.



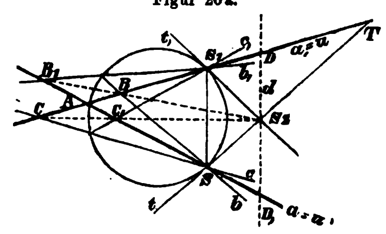
In jedem einer Kurve II[ter] Ordnung eingeschriebenen 4eck schneiden sich die Gegenseiten und die Tangenten t t′ zu 2 gegenüberstehenden Eckpunkten in 3 Punkten einer Geraden u. Figur 23.

Figur 25.



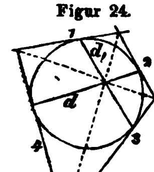
In jedem einer Kurve II[ten] Grades eingeschriebenen 3eck schneiden sich die Tangenten t_1 t_2 t_3 an die Eckpunkte mit den gegenüberstehenden Seiten in 3 Punkten einer Geraden. Figur 25.

Figur 26a.



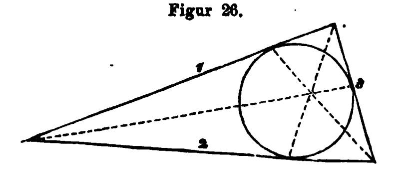
Lässt man in Figur 18 die ÷ u und u_1 sich drehen und zwar so, dass u mit 1 a, und u_1 mit a zusammen-

Figur 24.



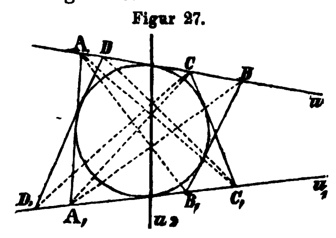
In jedem 4eck, welches aus | eines Büschels II^{ter} Ordnung besteht, schneiden sich die Diagonalen und die Verbindungslinien d d, von je 2 gegenüberstehenden Berührungs • • in einem Punkte. Figur 24

Figur 26.



Die 3 ——, welche in einem von 3 | eines Büschels II^{ter} Ordnung gebildeten 3eck die Eck • • mit den gegenüberliegenden Berührungs • • verbinden, schneiden sich in einem Punkte. Figur 26.

Figur 27.



Lässt man in Figur 19 S, mit A und S mit A, zusammenfallen, so fällt die —— S, ū u, mit u und die ——

Doppel-

fällt und bestimmt S_2, so ist dieses der Durchschnitts • der Tangenten t und $t_,$; denn um den entsprechenden Strahl $\overline{S_, S}$ zu finden, hat man S durch S_2 nach T zu projeciren und $\overline{S T}$ zu ziehen, und ebenso ergibt sich der entsprechende | von $\overline{S S_,}$ in der Linie $S_1 S_2$.

Ausserdem liegen b, à à, b, sowie è, a à, c in 2 durch S_2 gehenden ——. Dasselbe würde mit den Punkten b, è — è, b, sowie è, b • b, c stattfinden, wenn man u und u, mit e und e, oder b und b, zusammenfallen lassen würde.

Daraus

Die beiden Punkte à b, und à, b, in welchen irgend 2 Paare entsprechender | der $\overline{\wedge}$ ✻ S und S, sich wechselseitig schneiden, liegen mit dem Schnitt • S_2 der Tangenten an S und S, in einer Geraden.

Sind daher 3 Paar entsprechender Strahlen a a,, b b,, c c, gegeben, so ergibt sich aus den Durchschnitts • • à b,, à, b, à c,, à, c nach Figur 26 sehr leicht • S_2 und jede durch ihn gelegte —— d schneidet mit a und a, entsprechende • • ab.

Bilden 4 • • K L M N einer Kurve II[ter] Ordnung ein vollständiges 4eck und ihre Tangenten k l m n ein vollständiges 4seit, so liegen in den Verbindungslinien der 3 • • X Y Z, in welchen die Gegenseiten des 4ecks sich schneiden, je 2 Gegen • • des 4seits, denn die vorigen Sätze gelten für jedes der 3 einfachen 4ecke, in denen das vollständige zerfällt. Figur 28.

S ü u, mit u, zusammen und das ÷ u_2 geht durch die Berührungs • • T und T,.

Ausserdem liegen alsdann auf $\overline{T\,T,}$ die Schnitt • • der —— $\overline{A,B}$ und $\overline{A\,B,}$, $\overline{A,C}$ und $\overline{A\,C,}$.

Dasselbe würde mit $\overline{B\,C,}$ und $\overline{B,C}$ stattfinden, wenn die Mittelpunkte der Strahlenbüschel S und S, nach C, und C verlegt würden.

Figur 27a.

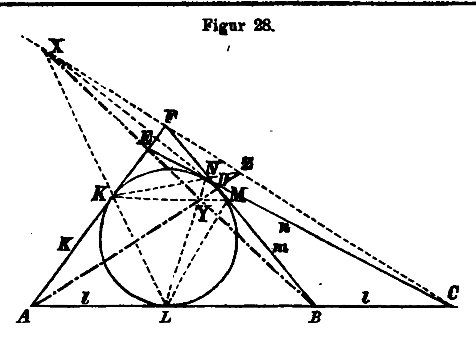
folgt:

Die beiden —— $\overline{A\,B,}$ und $\overline{A,B,}$ durch welche irgend 2 Paare entsprechender • • der $\overline{\wedge}$ ÷ u und u, sich wechselseitig projeciren, schneiden sich auf der Verbindungslinie der Berührungs • • von u und u, (Berührungssehne u_2).

Sind daher 3 Paar entsprechende • • (Figur 27) gegeben, so bestimmen die Durchschnittspunkte von $\overline{A\,B,}$, A, B und A C,, C, A die Berührungssehne u_2. Zu jedem • D ergibt sich der entsprechende D,, indem man D nach C, projecirt und C durch u_2 nach u,.

Bilden 4 Strahlen eines Büschels II^ter^ Ordnung k l m n ein **vollständiges** 4seit und ihre Berührungs • • K L M N ein **vollständiges** 4eck, so gehen durch die Schnittpunkte x y z der 3 ——, welche die Gegenpunkte des 4ecks verbinden, je 2 Gegenseiten des 4seits, denn die vorigen Sätze gelten für jedes der 3 4seite, aus denen das vollständige zusammengesetzt ist. Figur 28.

Figur 28.



Die sämmtlichen Tangenten einer Kurve II^ter^ Ordnung bilden einen ❋ II^ter^ Ordnung.

Da bei der Bewegung von • k die —— M K ebenfalls welcher zu dem von $\overline{BC}$ beschriebenen ❋ ∧ und folg- der Satz von Chasles:

Sind auf einer Kurve II^ter^ Ordnung ein beliebiger und weist man jedem | von M, welcher einen beliebigen welchen die Tangente k des • K hindurch geht, so sind zogen. Figur 28 und 29.

Daher sind auch die Tangenten an 4 harmonische

Da nach früheren Erklärungen jede Kurve und jeder legenen • durch eine Kegelfläche resp. Ebenenbüschel II^ter^ □ und jeder Berührungspunkt durch einen | (Berührungs-

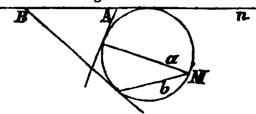
Die sämmtlichen Berührungs □ □ einer Kegelfläche II^ter^ Ordnung bilden einen [|] II^ter^ Ordnung.

Die sämmtlichen | einer Kegelfläche II^ter^ Ordnung werden aus je 2 unter ihnen durch $\overline{\wedge}$ [|] projecirt.

Denkt man sich • k auf der Kurve beweglich, so gleiten die Schnitt • • der Tangente k, nämlich E und A, auf n und l weiter und beschreiben dabei 2 ⊼ ÷, denn es ist S N die Berührungssehne, wie in Figur 27, auf der sich immer je 2 | A D und E B wechselseitig in Y schneiden. Die Tangente k durchläuft daher bei ihrer Drehung einen ❋ IIter Ordnung.

Daraus folgt:

Figur 29.



Die sämmtlichen Berührungs • • eines ❋ IIter Ordnung bilden eine Kurve IIter Ordnung.

stets durch Y geht, so beschreibt sie um • M einen ❋, lich zu dem von E beschriebenen ÷ ⊼ ist. Daraus folgt

fester • M und eine beliebige feste Tangente n gegeben, • k der Kurve projecirt denjenigen • von n zu, durch der ❋ M und das gerade Gebilde n ⋀ auf einander be-

• • einer Kurve IIter Ordnung 4 harmonische Tangenten.

❋ IIter Ordnung aus einem nicht in derselben □ be- Ordnung projecirt wird, jede Tangente aber durch eine strahl) projecirt wird, so folgt daraus:

Die sämmtlichen Berührungs | eines [|] IIter Ordnung bilden eine Kegelfläche IIter Ordnung.

Die sämmtlichen Berührungs □ □ einer Kegelfläche IIter Ordnung werden von je 2 unter ihnen in ⊼ ❋ geschnitten.

Vier | einer Kegelfläche IIter Ordnung heissen harmonische, wenn sie aus irgend einem und folglich aus jedem fünften Strahle der Fläche durch 4 harmonische ▢ ▢ projecirt werden.

In jedem einer Kegelfläche eingeschriebenen 6kant schneiden sich die 3 Paar Gegenseiten in 3 — einer ▢.

Bezeichnet man die ∞ ferne Gerade einer ▢ mit weder keinen • oder einen • oder 2 • •.

In Fall I sind alle • • der Kurve und alle Tangenten dann eine Ellipse. In Fall II berührt die unendlich oder uneigentlichen •. Die Kurve heisst eine Parabel. und letztere hat 2 uneigentliche • •, jedoch 2 eigentliche Hyperbel.

Zwei ⊼ ❊, die schief in der ▢ liegen, erzeugen parallel läuft; eine Parabel, wenn 1 Paar; und eine sich leicht erkennen, wenn man die ⊼ ❊ so in der ▢ richtung zu ändern. Die ‖ Strahlen fallen dann zu-

Zwei ⊼ ∸ können nur dann eine Parabel erzeugen, denn die unendlich ferne — ist eine der Tangenten (Figur 27a), indem man 2 entsprechende • • aufeinander bündels dar, weil ihr Projektions-Mittel • auf dem ∞

Bewegen sich die Eck • • eines △ so auf 3 in der ▢ ändern, so beschreibt die dritte Seite entweder auch ein Parabel umhüllt. Denn durch die ‖ ❊ der ersten 2 Seiten auf das dritte und folglich auf einander ⊼ ∾ bezogen.

Sind ein ∸ u und ein ❊ S, die in derselben ▢ liegen, u eine ‖ zu dem entsprechenden | von S, so schneiden sich rabel. Schneidet man nämlich den ❊ S durch die ∞ zu u projektivisch liegt. Ist dasselbe nicht ⊼ zu u, so ∞ ferne — enthält und folglich eine Parabel umhüllt.

Wird eine Kurve IIter Ordnung aus einem nicht in eine Cylinderfläche IIter Ordnung.

Sätze.

Vier Berührungs □ □ einer Kegelfläche II^{ter} Ordnung heissen harmonische, wenn sie von irgend einer und folglich auch von jeder fünften in 4 harmonischen Strahlen geschnitten werden,

In jedem einer Kegelfläche II^{ter} Ordnung umschriebenen 6kant schneiden sich die 3 Haupt-Diagonalebenen in einer —.

u, so hat eine Kurve II^{ter} Ordnung damit gemein: ent-

eigentliche • • und | der Ebene und die Kurve heisst ferne — die Kurve und letztere hat einen ∞ fernen Im dritten Falle schneidet die ∞ ferne — die Kurve Tangenten (Asymptoten) in dieselbe. Die Kurve ist eine

daher eine Ellipse, wenn kein Paar entsprechender | Hyperbel, wenn 2 Paar || laufen. Der Parallelismus lässt verschiebt, dass sie konzentrisch werden ohne die Strahlensammen.

wenn die ∞ fernen • • zugleich entsprechende • • sind, Solche ÷ heissen $\overline{\wedge}$ ∾. Bringt man sie in ∧ Lage, legt, so stellen sie sich als Schnitte eines ‖ Strahlenfernen |, also selbst ∞ ferne liegt. Daraus folgt: gegebenen —, dass 2 Seiten desselben ihre Richtung nicht ‖ Strahlenbüschel oder einen ✻ II^{ter} Ordnung, der eine werden 2 von den ÷, die in den gegebenen — liegen,

$\overline{\wedge}$ auf einander bezogen und zieht man durch jeden • von diese ‖ entweder in einem • oder sie umhüllen eine Paferne — der □, so erhält man ein ∞ fernes ÷, welches erzeugt es mit u einen ✻ II^{ter} Ordnung, welches auch die

ihrer □ liegenden ∞ fernen • projecirt, so erhält man

Graphische Statik.

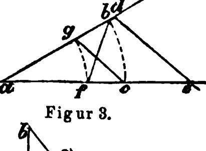
Multiplikation von Strecken.

Figur 1.

a und b seien die zu multiplicirenden Strecken, x das gesuchte Produkt, so mache man, Figur 1:

$ac =$ der Maasseinheit,
$ab = b$,
$ae = a$, ziehe
$bc \parallel de$, so ist
$ad = x$.

Figur 2.

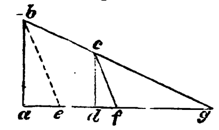


Oder man mache, Figur 2:
$af =$ Eins,
$ab = b$,
$ad = a$, ziehe
de anti $\parallel bf$, so ist
$ae = x$.

Figur 3.

Oder Figur 3:
$ab =$ Eins,
$ae = a$,
$cd = b \parallel ab$,
$cf \parallel be$, so ist
$df = x$.

Figur 4.

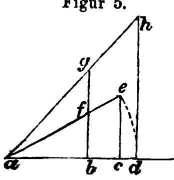


Oder Figur 4:

$ab = \text{Eins}$, $cd = b \parallel ab$,
$eg = a$, $cf \parallel be$, so ist
$fg = x$.

Sind 3 Strecken a b c zu multipliciren, Figur 5, so mache man:

Figur 5.



$ab = \text{Eins}$,
$ac = a$,
$gb \perp ad$,
$af = b$,
$ec \perp ad$,
$ae = ad$,
$hd \perp ad$,
$ag = c$, so ist
$ah = x = a \cdot b \cdot c$.

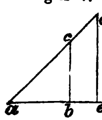
Figur 6.

Oder Figur 6:

$ab = \text{Eins}$,
$ac = a$,
$eb \perp ac$,
$ae = b$,
$fc \parallel eb$,
$ad = af$,
$gb = c$,
$kd \parallel gb$, so ist
$kd = x = a \cdot b \cdot c$.

Division von Strecken.

Figur 7.



Es sei: a der Dividendus,
b der Divisor,
x der Quotient.

Man mache:

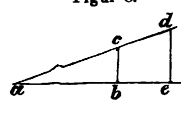
$ab = \text{Eins}$,
$cb \perp ae$.

$ac = b$ und $ad = a$,
$de \perp ae$, so ist

$$ae = x = \frac{a}{b}.$$

Oder Figur 8:

Figur 8.

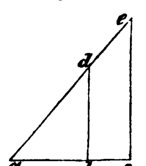


$ab =$ Eins,
$ae = b$,
$de \perp ae$,
$ad = a$,
$cb \parallel de$, so ist

$$ac = x = \frac{a}{b}.$$

Figur 9.

Oder Figur 9:



$ab =$ Eins,
$ac = b$,
$ec \perp ac = a$,
$db \parallel ec$, so ist
$db = x$,

$$= \frac{a}{b}.$$

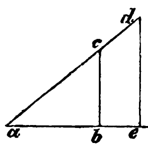
Multiplikation verbunden mit Division.

Es sei die Strecke a zu multipliciren mit einem Bruche $\frac{b}{c}$, und es sei

$$x = \frac{ab}{c}.$$

Man mache, Figur 10:

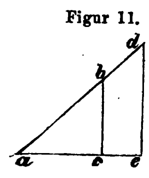
Figur 10.



$ab = c$,
$ae = a$,
$bc \perp ae$,
$ac = b$,
$de \parallel cb$, so ist

$$ad = x = \frac{ab}{c}.$$

Figur 11.



Soll $\frac{a\,b}{2}$ konstruirt werden, so mache man, Figur 11:

$a\,c = 2$ mal der Einheit,
$b\,c \perp a\,c = b$,
$d\,e \parallel b\,c$, so ist
$$d\,e = x = \frac{a\,b}{2}.$$

Flächeninhalt des Dreiecks.

Es sei h die Höhe, b die Grundlinie, F der Flächeninhalt, Figur 12:

Figur 12.

Man nehme eine Seite, z. B. a c als Grundlinie an, mache

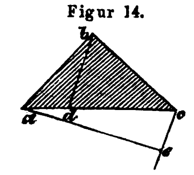
$a\,d = 2$ mal der Einheit,
$e\,c \parallel b\,d$,
$e\,f \perp a\,c$, so ist
$$e\,f = F = \frac{b\,h}{2}.$$

Figur 13.

Oder Figur 13:

$a\,d \perp a\,c = 2 \times$ der Einheit,
$b\,e \perp a\,c$,
$b\,f \parallel d\,c$, so ist
$$e\,f = F = \frac{b\,h}{2}.$$

Figur 14.



Oder Figur 14:

$b\,d = 2 \times$ der Einheit,
$c\,e \parallel b\,d$,
$a\,e \perp c\,e$, so ist
$$a\,e = F = \frac{b\,h}{2}.$$

Flächeninhalt des Vierecks.

a. Parallelogramm.

b Grundlinie, h Höhe, F Flächeninhalt.

Figur 15.

Figur 15.

$ae =$ Eins,
$fe \perp ab$,
$bg \perp ab$,
$bg = F$
$= bh$.

b. Beliebiges Viereck.

Figur 16.

Figur 16.

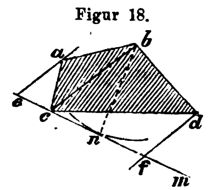
$ae \parallel cb$,
$bf = 2 \times$ der Einheit,
$eg \parallel bf$,
$dg \perp ge$, so ist
$dg = F$.

Figur 17.

Oder Figur 17:

$af \parallel bd$,
$cf = 2 \times$ der Einheit,
$be \parallel cf$,
$de \perp be$, so ist
$de = F$.

Figur 18.



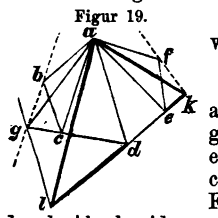
Oder Figur 18:

Kreis mit $bn = 2 \times$ der Einheit um b,
cm durch c berührend an den Kreis,
$ae \parallel cb$,
$df \parallel cb$, so ist
$ef = F$.

Flächeninhalt von Polygonen.

Figur 19.

Die Konstruktion des Flächeninhalts geschieht durch Verwandelung des Polygons in ein △.



Figur 19.

Die Verwandelung selbst geschieht wie folgt:

a b c d e f sei das Polygon.

Man schneide durch a c eine Ecke ab, ziehe b g ∥ a c, verlängere c d bis g und ziehe a g, so ist a b c d e f in ein Polygon a g d e f verwandelt, welches eine Seite weniger hat. Durch Fortsetzung der Konstruktion, resp. durch Abschneiden anderer Ecken wie bei f, gelangt man zu dem △ a l k, welches dem Polygon a b c d e f flächengleich ist und dessen Inhalt nach den früher gegebenen Methoden ermittelt werden kann.

Potenziren von Strecken.

Figur 20.

Figur 20.

a r o m c d e k

Es sei a der Grundfaktor.

Man mache

a c = Eins,
b c ⊥ a k,
a b = a,
a d = a b,
a f ⊥ a k.
a f = a e,
e g ⊥ a k u.s.w., so ist
a b = a,
a f = a^2,
a g = a^3 u.s.w.

Macht man links von b c:

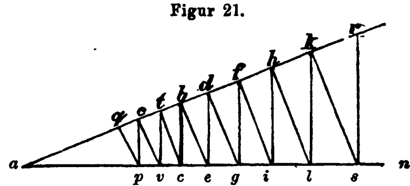
$$a\,l = a\,c,$$
$$l\,m \perp a\,k,$$
$$a\,m = a\,n,$$
$$n\,o \perp a\,k,$$

u. s. w., so ist

$$a\,m = a^{-1} = \frac{1}{a},$$
$$a\,o = a^{-2} = \frac{1}{a^2},$$
$$a\,r = a^{-3} = \frac{1}{a^3}.$$

Oder Figur 21:

Figur 21.



Man mache

$a\,c =$ Eins; $b\,c \perp a\,n$; $a\,b = a$; ferner
b e, d g, f i, h l, k s u. s. w. $\perp$ a m und
d e, f g, h i, k l, r s u. s. w. $\perp$ a n,

so ist rechts von b c:

$a\,e = a^2$; $a\,g = a^4$; $a\,i = a^6$; $a\,l = a^8$ u. s. w.;
$a\,d = a^3$; $a\,f = a^5$; $a\,h = a^7$; $a\,k = a^9$ u. s. w.;

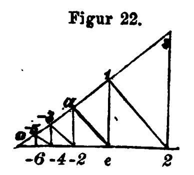
links von b c:

$a\,t = a^{-1}$; $a\,c = a^{-3}$; $a\,q = a^{-5}$ u. s. w.;
$a\,v = a^{-2}$; $a\,p = a^{-4}$; u. s. w.

Diese beiden Konstruktionen setzen voraus, dass $a > 1$ ist.

Bei den nachfolgenden ist $a < 1$.

Figur 22.



Man mache, Figur 22:

$o\,e =$ Eins,

$o\,a = a,$

$a\,e \perp o\,a$

und ziehe die Lothe und Gegenlothe, so ist:

$$o\,1 = \frac{1}{a}, \qquad o - 2 = a^2,$$

$$o\,2 = \frac{1}{a^2}, \qquad o - 3 = a^3,$$

$$o\,3 = \frac{1}{a^3} \qquad o - 4 = a^4$$

u. s. w. u. s. w.

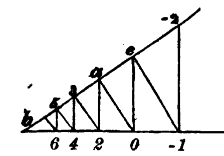
Oder Figur 23:

Man mache

$o\,e =$ Eins, $\quad o\,b \perp o\,e,$

$o\,a = a, \quad o\,a \perp a\,e.$

Figur 23.



Ziehe die Lothe und Gegenlothe, so ist:

$o\,a = a,$

$a\,2 = a^2,$

$2\,3 = a^3$

u. s. w.

$$o\,e = a^0 = 1,$$

$$e - 1 = a^{-1} = \frac{1}{a},$$

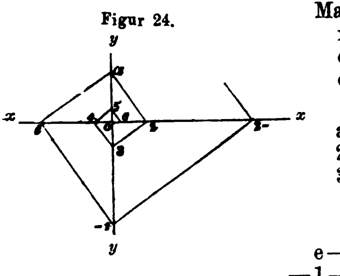
$$-1 - 2 = a^{-2} = \frac{1}{a^2},$$

$$-2 - 3 = a^{-3} = \frac{1}{a^3}$$

u. s. w.

Das Verfahren Figur 24 ist sowohl für $a > 1$ wie auch für $a < 1$ giltig.

Figur 24.



Man mache:

$xx \perp yy$,
$oe = $ Eins,
$oa = a$;

ferner:

$a2 \perp ae$,
$23 \perp a2$,
$34 \perp 23$
u. s. w.

Ebenso

$e-1 \perp ae$,
$-1-2 \perp e-1$,

so ist:

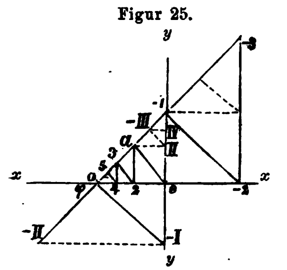
$$o2 = a^2;\ o3 = a^3:\ o4 = a^4 \text{ u. s. w.}$$

$$o-1 = \frac{1}{a};\ o-2 = \frac{1}{a^2};\ o-3 = \frac{1}{a^3} \text{ u. s. w.}$$

Potenziren der trigonometrischen Funktionen.

Sinus und Cosinus.

Figur 25.



Man mache, Figur 25:

$xx \perp yy;\ oe = 1$
$\sphericalangle \varphi = $ dem gegebenen $\sphericalangle$,
$ea \perp oa$.

Zieht man die Lothe und Gegenlothe:

$a2;\ 23;\ 34$ u. s. w.;

ferner:

$e-1;\ -1-2$ u. s. w.,

so ist:

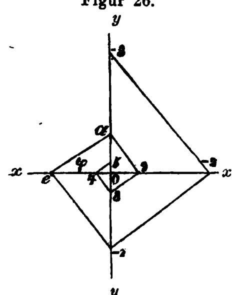
$$o\,a = \cos.\,\varphi,$$
$$o\,2 = \cos.\,\varphi^2,$$
$$o\,3 = \cos.\,\varphi^3,$$
$$o\,4 = \cos.\,\varphi^4,$$
$$\cdots\cdots$$
$$o-1 = \frac{1}{\cos.\,\varphi},$$
$$o-2 = \frac{1}{\cos.\,\varphi^2} \text{ u. s. w.}$$

Zieht man die Lothe und Gegenlothe:
a II; II III; III IV; . . . o—1; —I—II u. s. w., so ist

$$a\,e = \sin.\,\varphi,$$
$$a\,II = \sin.\,\varphi^2,$$
$$II\,III = \sin.\,\varphi^3,$$
$$III\,IV = \sin.\,\varphi^4$$
$$\cdots\cdots$$
$$o-1 = \frac{1}{\sin.\,\varphi},$$
$$-I-II = \frac{1}{\sin.\,\varphi^2} \text{ u. s. w.}$$

Tangente und Cotangente, Figur 26.

Figur 26.



Man mache:

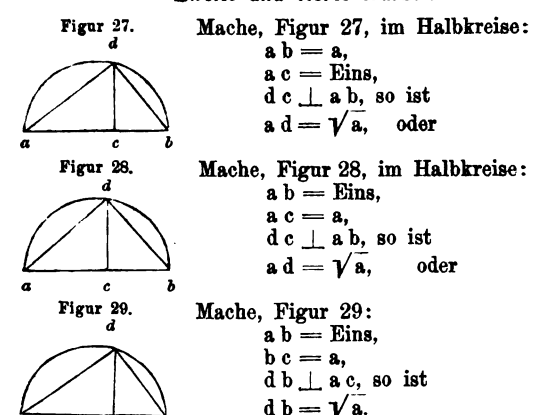
$x\,x \perp y\,y,$
$\sphericalangle\,\varphi =$ dem gegebenen $\sphericalangle$,
$e\,o =$ Eins.

Zieht man die Wechsellothe, so ist:

$$o\,a = \text{tang.}\,\varphi,$$
$$o\,2 = \text{tang.}\,\varphi^2,$$
$$o\,3 = \text{tang.}\,\varphi^3,$$
$$\cdots\cdots$$
$$o\,e = 1,$$
$$o-1 = \cot.\,\varphi,$$
$$o-2 = \cot.\,\varphi^2$$

u. s. w.

Zweite und vierte Wurzel.



Figur 27. Figur 28. Figur 29.

Mache, Figur 27, im Halbkreise:

$a\,b = a,$
$a\,c = \text{Eins},$
$d\,c \perp a\,b,$ so ist
$a\,d = \sqrt{a},$ oder

Mache, Figur 28, im Halbkreise:

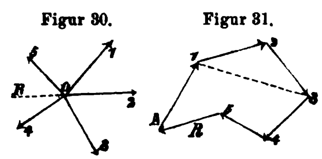
$a\,b = \text{Eins},$
$a\,c = a,$
$d\,c \perp a\,b,$ so ist
$a\,d = \sqrt{a},$ oder

Mache, Figur 29:

$a\,b = \text{Eins},$
$b\,c = a,$
$d\,b \perp a\,c,$ so ist
$d\,b = \sqrt{a}.$

Das Ausziehen der 4ten Wurzel kann durch 2maliges Ausziehen der Quadrat $\sqrt{}$ geschehen, überhaupt kann dieses Verfahren auf Halbirung des Exponenten eines Radikanten angewandt werden.

Mittelkraft eines Kräftebüschels.



Figur 30. Figur 31.

Die Mittelkraft R aus einem Kräftebüschel, Figur 30, wird gefunden, indem man ein Polygon (Figur 31) bildet,

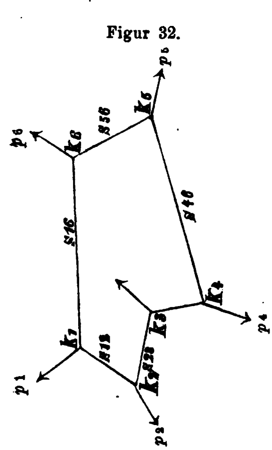
worin man A 1 = und ‖ Kraft 1,
1 2 = „ ‖ „ 2,
2 3 = „ ‖ „ 3
u. s. w.
zieht. Die Schlusslinie R = 5 A ist die Mittelkraft der Grösse und Richtung nach.

Im geschlossenen Kräftepolygon ist jede einzelne Kraft die Mittelkraft von den übrigen. So ist in Figur 31:

1 2 die Mittelkraft von 3 4 5 R 1,
3 4 „ „ „ 1 2 3 5 R,
1 3 „ „ „ 2 und 3, oder von 4 5 R 1.

Das Seilpolygon.

Figur 32.



Wenn Kräfte an einem Körper in der Ebene wirken, so kann man sich denselben durch ein System von geradlinigen festen Gebilden ersetzt denken, welche, von einer Kraft zur anderen gehend, ein Polygon bilden, dabei sowohl Zug- als Druckkräften widerstehen können und so gerichtet sind, dass jede der einzelnen Kräfte im Gleichgewicht mit den beiden Kräften ist, welche in den genannten Polygonseiten wirkend, mit ihr an einem Punkte angreifen.

Ein solches Polygon heisst Seil oder Gelenkpolygon, Figur 22. Die Polygonecken k heissen Knoten. Die in den Polygonseiten wirkenden Kräfte heissen innere, die an den Ecken wirkenden äussere Kräfte.

a. Gleichgewicht der äusseren Kräfte.

Wenn man aus den äusseren Kräften, ganz wie im vorigen Abschnitt, ein Kräftepolygon bildet, so ist dieses geschlossen, wenn Gleichgewicht vorhanden ist, oder gibt anderenfalls die Grösse und Richtung der Mittelkraft an.

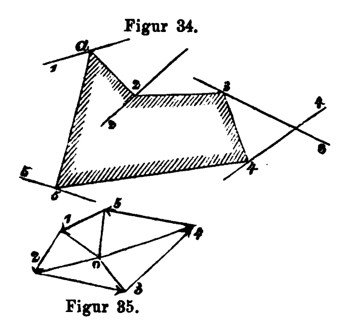
b. Gleichgewicht der inneren Kräfte.

Figur 33.

Bildet man in Figur 33 das Kräftepolygon zu dem Seilenpolygon Figur 32 und zieht von den Enden einer Kraft, z. B. von p_2 die Parallelen 0 1 und 0 2 zu s 1·2 resp. s 1·3, so schneiden sich diese in einem Punkte 0, welcher der Pol des Kräftepolygons heisst.

Die von dem Pol 0 nach den Ecken des Polygons gezogenen Strahlen 0 1, 0 2, 0 3 u. s. w. geben die Spannungen im Seilpolygon der Grösse und Richtung nach an.

Figur 34.



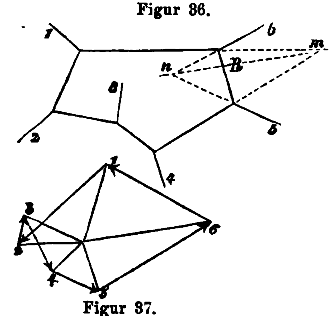
Figur 35.

Aus dem Kräftepolygon Figur 35 und einem willkürlich darin angenommenen Pol lässt sich das Seilpolygon für in der Ebene zerstreut liegende Kräfte, Figur 34, bilden, indem man von einem beliebigen Punkte a ausgehend

a 2 ‖ 0 1,
2 3 ‖ 0 2,
3 4 ‖ 0 3,
4 5 ‖ 0 4,
u. s. w. zieht.

c. Mittelkraft von zerstreut in der Ebene liegenden Kräften.

Figur 36.



Figur 37.

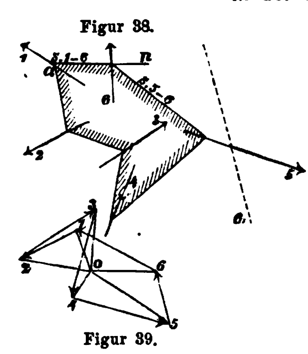
Der Durchschnittspunkt m zweier Seiten des Seilpolygons Figur 36 ist ein Punkt der Mittelkraft aller zwischen den beiden Seiten liegenden Kräfte 1•2•3•4.

Die Richtung und Grösse dieser Mittelkraft wird durch die Diagonale 4 • 6 im Kräftepolygon, Figur 37, bestimmt.

Hiernach lässt sich eine gegebene Kraft 4•6, Figur 37, in 2 Kräfte 5 und 6 von gegebener Richtung zerlegen. Zu dem Ende trage man die Kräfte 5 und 6 in das Kräftepolygon ein. Nehme mit der Kraft R, Figur 36, einen beliebigen Punkt n an und ziehe 5 und 6 Figur 36 ‖ 5•6 und 4•5 in Figur 37.

Gleichgewichtsbedingungen für zerstreut wirkende Kräfte in der Ebene.

Figur 38.



Figur 39.

Gleichgewicht ist vorhanden, wenn sowohl der Kräftepolygon wie auch das Seilpolygon eine geschlossene Figur bildet.

Ist kein Gleichgewicht vorhanden, so zeigt das Seilpolygon an, wie dasselbe herzustellen sei.

a) Herstellung des Gleichgewichts durch eine Kraft, deren Richtung gegeben ist.

In Figur 38 sei 6, diese Richtung und 1·2·3·4·5 die gegebenen Kräfte.

Man bilde das Kräftepolygon Figur 39, wähle einen Pol 0, ziehe die Polstrahlen und bilde das Seilpolygon Figur 38.

In dem Durchschnittspunkt von s·4·6 und s·5·6, Figur 38, ziehe man eine Parallele zu 6,, so ist dieses die Lage der gesuchten Kraft. Ihre Grösse ist gleich 5·6 im Kräftepolygon Figur 29.

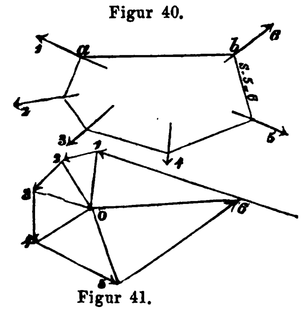
b) Herstellung des Gleichgewichts durch eine der Lage und Grösse nach unbekannte Kraft.

Man bilde das Kräftepolygon und ziehe dessen Schlusslinie. Nehme einen Pol an und bilde das Seilpolygon.

c) Herstellung des Gleichgewichts, wenn ausserdem auch die Grösse einer der Kräfte unbekannt ist, und eine Seite des Seilpolygons eine gegebene Lage haben soll.

Es sei 1 die Kraft, deren Grösse unbekannt ist, und a b die gegebene Richtung der Polygonseite. Figur 40.

Figur 40.

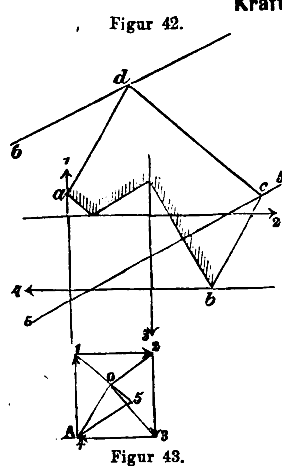


Figur 41.

Man bilde das Kräftepolygon Figur 41 bis Ecke 5, indem man Kraft 1 der Grösse nach unbestimmt lässt. Aus den Polstrahlen lässt sich dann das Seilpolygon verzeichnen und ist nur noch die Lage von Kraft 6 darin zu bestimmen. Zu dem Ende ziehe man in Figur 41 0 6 ‖ a b Figur 40 und 6 Figur 40 ‖ 5 6 Figur 41.

Kräftepaare.

Figur 42.



Figur 43.

Um zu einem Kräftepaare 1•2•3•4 Figur 42 ein 3tes, dessen Richtung in 5 5 Figur 42 gegeben ist, zu finden, bilde man zuerst das Kräftepolygon zu 1•2•3•4, Figur 43, wähle einen Pol 0 und ziehe die Polstrahlen 0 1, 0 2, 0 3, 0 4. Alsdann verlängere man 1 0 und ziehe 4'5 Figur 43 ‖ 5 5 Figur 42. Es lässt sich hierauf das Seilpolygon Figur 42 von a bis b wie gewöhnlich verzeichnen. Alsdann ziehe man

c b Figur 42 ‖ 0 4 Figur 43,
c d „ 42 ‖ 0 5 „ 43,
a d „ 42 ‖ 0 4 „ 43,

Durch d ziehe man eine Parallele zu 5 5 Figur 42, so ist dieses die Kraft 6. Die Grösse von 5 und 6 ist = 4·5 Figur 43.

Gleichgewicht zwischen parallelen Kräften.

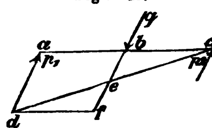
a. Gleichgewicht zwischen 3 parallelen Kräften.

Figur 44.

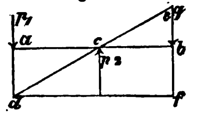
Figur 44. 45. 46.

Man trage die Kraft an einem der beiden andern Angriffspunkte, z. B. bei a an, mache a d # q, verbinde d mit dem anderen Angriffspunkt c.

Figur 45.



Figur 46.



Ziehe d f ∥ a b und verlängere q bis zum Schnittpunkte f, so ist

$$b e = p_1,$$
$$e f = p_2.$$

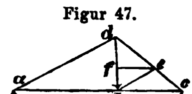
Oder Figur 47. 48. 49.

Man mache

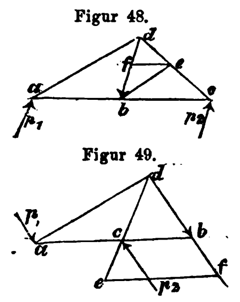
$$d b = q.$$

Ziehe a d und d c nach den beiden anderen Angriffspunkten a und c.

Figur 47.



Figur 48.



Figur 49.

Ferner

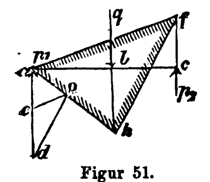
$$b\,e \parallel a\,d,$$
$$f\,e \parallel a\,c,$$

so ist:

$$b\,f = p_1,$$
$$f\,d = p_2.$$

Oder Figur 50. 51.

Figur 50.



Man mache

$$a\,d = q,$$

wähle einen beliebigen Pol o und ziehe die Polstrahlen a o und o d. Bilde dann das Gelenkpolygon a p f, indem man

$$a\,h \parallel a\,o,$$
$$p\,f \parallel o\,d$$



und die Schlusslinie a f zieht.

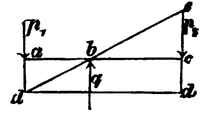
Figur 51.

Legt man den Polstrahl

$$e\,o \parallel a\,f, \text{ so ist}$$
$$a\,e = p_1,$$
$$d\,e = p_2.$$

Oder Figur 52. 53.

Figur 52.

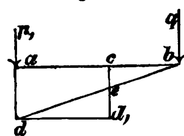


Man mache

$$a\,d = p_2,$$
$$e\,c = p_1,$$
$$d\,d' \parallel a\,b,$$

verbinde d mit e, so ist b der An-

Figur 53.

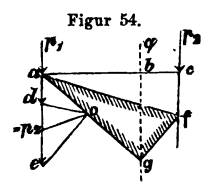


griffspunkt von q und

$$q = e\,d' = p_1 + p_2.$$

Oder Figur 54.

Figur 54.



Man mache

$$a\,d \# p_1,$$
$$d\,e \# p_2,$$

wähle den Pol o und ziehe die Polstrahlen

a o, o d, o e,

bilde das Gelenkpolygon a f g, indem

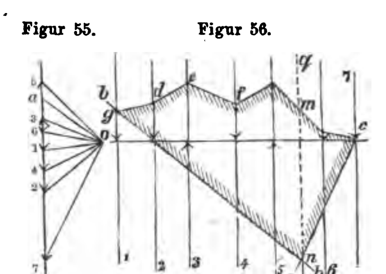
$$a\,f \parallel o\,d,$$
$$f\,g \parallel o\,e,$$
$$a\,g \parallel a\,o$$

gezogen wird. Der Schnittpunkt g von g f und a g liegt in der Richtungslinie der Mittelkraft q. Ihr Angriffspunkt b wird gefunden, indem man $b\,g \parallel p_1$ und p_2 legt, ihre Grösse ist $= p_1 + p_2 = a\,e$.

b. Gleichgewicht zwischen beliebig vielen Parallelkräften.

Wirken mehrere Parallelkräfte in der Ebene auf einen Körper, so kann man zur Bestimmung der Mittelkraft je zwei und zwei derselben vereinigen, bis man auf die Mittelkraft kommt und dazu die vorhin angeführten Methoden benutzen. Andererseits kann man die Mittelkraft finden, indem man das Kräftepolygon Figur 55 und das Seilpolygon Figur 56 bildet.

Figur 55. Figur 56.



Zu dem Ende mache man:

Kraft 1 = Linie a 1 Figur 55,
„ 2 = „ 1·2 „
„ 3 = „ 2·3 „
„ 4 = „ 3·4 „
„ 5 = „ 4·5 „
u. s. w. und wähle den Pol o.

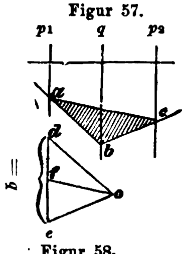
Ziehe b b Figur 56 ‖ a o Figur 55,
g d „ ‖ o 1 „
d e „ ‖ o 2 „
e f „ ‖ o 3 „
u. s. w. bis
c c Figur 56 ‖ o 7 Figur 55.

Der Durchschnittspunkt n von c c und b b ist ein Punkt der Mittelkraft q.

Zieht man n m Figur 56 ‖ a 7 Figur 55, so ist dieses die Lage von q, während die Linie a 7 Figur 55 ihre Grösse ergiebt.

Zerlegung von Kräften in zwei oder mehrere parallele Kräfte.

Figur 57.



Figur 58.

Ist eine Kraft q in 2 Parallelkräfte von gegebener Lage zu zerlegen, die entweder zu beiden Seiten von q, Figur 57, oder beide auf einer Seite von q liegen, Figur 49, so bilde man das Gelenkpolygon a b c Figur 57 und 59, mache in Figur 58 und 60 d e = q und ziehe d o und e o Figur 58 und 60 parallel den entsprechenden Seilpolygon-Seiten, d. h.

Figur 60. Figur 59.

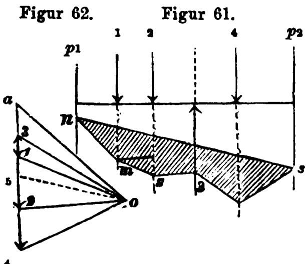
d o Figur 58 ‖ a b Figur 57,
d o „ 60 ‖ b c „ 59,
e o „ 58 ‖ b c „ 57,
e o „ 60 ‖ a c „ 59,

so ergibt sich der Pol o des Kräftepolygons. Zieht man o f ‖ der 3ten Polygonseite, so ist

$d f = p_1$,
$f e = p_2$.

Die Zerlegung einer Kraft in mehrere Parallelkräfte erfolgt durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens.

Figur 62. Figur 61.



Ist der Auflagerdruck p_1 und p_2 zu finden, den eine vertikale Belastung auf einen Träger ausübt, so konstruire man aus den gegebenen Vertikalkräften 1 2 3 4 u.s.w. das Kräftepolygon Figur 62, wähle den Pol o und ziehe die Polstrahlen. Alsdann bilde man das Seilpolygon Figur 61, indem man

$$nm \parallel ao,$$
$$ms \parallel o1$$
u. s. w.

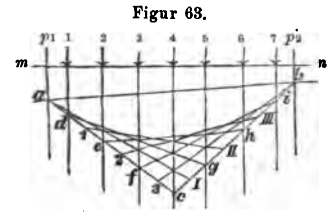
und zuletzt die Schlusslinie s n zieht.

Ein Polstrahl o 5 ‖ s n gezogen, theilt a 4 Figur 62 in die beiden Auflagerdrucke

$$p_2 = 4 \cdot 5,$$
$$p_1 = a \cdot 5.$$

Ist die Belastung gleichförmig vertheilt, so geht das Polygonstück unter der Schlusslinie in eine Parabel über.

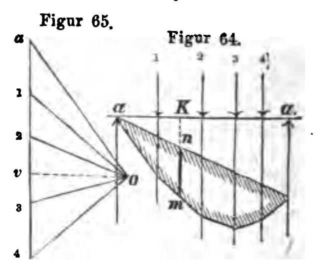
Figur 63.



Um dieselbe zu konstruiren, Figur 63, bilde man ein △ a b c, dessen Ecken a und b unter den Auflagerpunkten liegen, halbire d e, e f, f c, c g, g t r u. s. w. in 1. 2. 3 ... I. II. III u. s. w. und ziehe die Linien a I, d g, 1 II, e h, 2 III u. s. w.

Legt man a b ‖ dem Träger m n, so wird $\frac{de}{2} = \frac{cg}{2}$, $\frac{ef}{2} = \frac{gh}{2}$ u. s. w.

Statische Momente paralleler Kräfte.



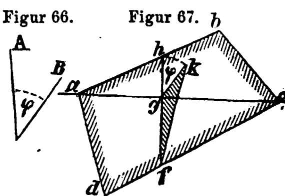
a. Ermittelung der statischen Momente der äusseren Kräfte.

Um bei Festigkeitsberechnungen an Trägern etc. das Moment der äusseren Kräfte für einen beliebigen Punkt k, Figur 64, des Trägers zu finden, bilde man zuerst das Kräftepolygon, Figur 65, aus der gegebenen Belastung und sodann das Seilpolygon, Figur 64. Zieht man durch k eine Parallele zu der Richtung der äusseren Kräfte, so ist das im Polygon liegende Stück m n = dem Momente der äusseren Kräfte für Punkt k. Zieht man in Figur 65

$$o\,v \perp a\,4,$$

so ist o v die Maasseinheit für die auf diese Weise gefundenen Momente.

b. Zusammensetzung und Zerlegung statischer Momente.



Wirken parallele Kräfte in 2 Ebenen A und B mit dem $\sphericalangle\, \varphi$ auf eine Axe a c, Figur 67, und ist für einen gewissen Punkt g das Moment in der einen Ebene = g h, in der anderen = g f, so findet man das resultirende Moment durch Bil-

dung des $\triangle$ g k f mit dem Aussenwinkel φ. Dasselbe ist alsdann = k f.

Durch das umgekehrte Verfahren erfolgt die Zerlegung von Momenten.

Schwerpunkts-Bestimmung.

Die Bestimmung des Schwerpunktes einer ebenen Figur lässt sich mittelst des Kräfteplanes (Seil- und Kräftepolygon) in vielen Fällen sehr leicht ausführen.

Man zerlegt die Figur in schmale Streifen von gleicher Breite, betrachtet die mittle Länge derselben als Kräfte und bildet daraus das Kräfte- und Seilpolygon. Die Richtungslinie der Mittelkraft, die nach den vorangegangenen Sätzen leicht zu ermitteln ist, ist eine Schwerlinie.

Wenn die Figur nicht symmetrisch ist, so wiederholt man dasselbe Verfahren von einer andern Seite aus. Der Durchschnittspunkt der gefundenen Schwerlinie ist der Schwerpunkt.

Kräftepläne für Fachwerks-Konstruktionen.

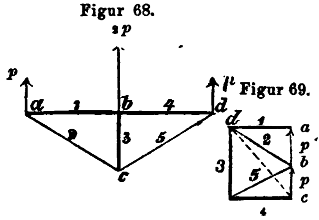
Ist ein gewisses Fachwerksystem gegeben und verzeichnet, so trage man zunächst die wirksamen äusseren Kräfte ein.

Von einem Knotenpunkte beginnend zerlege man die hier wirkende äussere Kraft nach den Richtungen der Stäbe, vereinige die gefundenen inneren Kräfte am nächsten Knoten mit den daselbst vorhandenen äusseren Kräften zu einer Mittelkraft, zerlege dieselbe wieder nach den folgenden Stabrichtungen und fahre in dieser Weise fort.

In dem Nachfolgenden sind die Kräftepläne für mehrere Fachwerksysteme aufgeführt. Die Druckkräfte sind mit starken, die Zugkräfte mit feinen Linien bezeichnet.

Die Nummern im Kräfteplan geben die Grösse der in den mit gleicher Nummer im Fachwerksystem bezeichneten Verbandstücken wirkenden Kräfte an.

Figur 68.



Figur 68 ist das System, Figur 69 der Kräfteplan. Man gelangt zu Letzterem durch folgende Konstruktion:

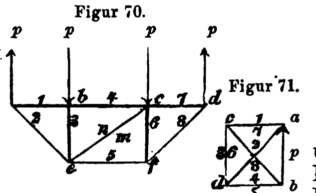
a b Figur 69 = p,
b c „ = p.
2 „ ‖ Figur 68,

wodurch p zerlegt ist in 1 und 2.

1 und 2 p bei Knoten 6 Figur 68 in Figur 69 vereinigt, gibt die Mittelkraft d c Figur 69. Dieser zerlegt nach den Richtungen 3 und 4 Figur 68 gibt im Kräfteplan Figur 69 die Kräfte 3 und 4.

3 und 2 im Knoten c vereinigt, gibt die Mittelkraft 5 im Kräfteplan Figur 69.

Figur 70.



Figur 70 ist das System,
„ 71 der Kräfteplan,
a b Figur 71 = p,
p zerlegt in 1 und 2.

In Knoten b Figur 70. 1 und p vereinigt, gibt als Mittelkraft c b Figur 71. Diese nach 3 und 4 Figur 70 zerlegt die Kräfte 3 und 4 im Kräfteplan.

In Knoten e Figur 70 2 und 3 vereinigt, gibt als Mittelkraft b d im Kräfteplan, diese nach n und 5 Figur 70 zerlegt, gibt für n die Kraft = Null, nebst der Kraft 5 im Kräfteplan.

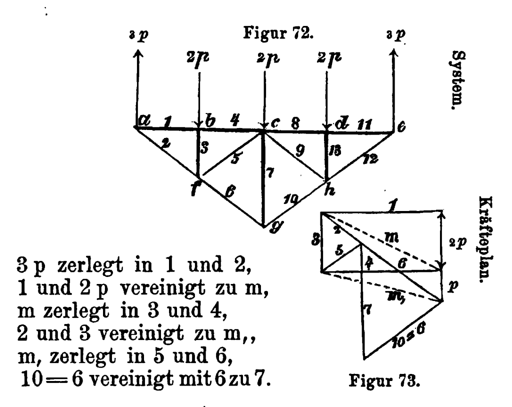
Zugband n ist daher überflüssig.

p und 4 im Knoten c vereinigt, Figur 70, gibt a d in Figur 71. a d zerlegt nach 6 und 7, Figur 70, gibt im Kräfteplan die Kräfte 6 und 7.

In Knoten f 5 und 6 vereinigt und nach 8 und Null zerlegt, gibt Kraft 8 im Kräfteplan.

Sind die Lasten in b und c 7 $<$ p, so wird die Spannung in n und m nicht wie vorher = Null, sondern erlangt einen leicht zu ermittelnden Werth.

Figur 72.

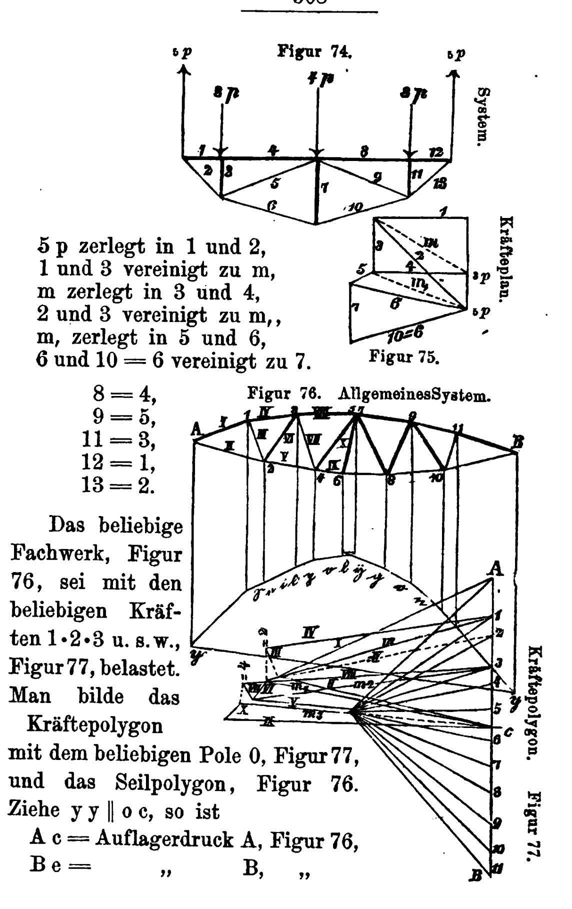


3 p zerlegt in 1 und 2,
1 und 2 p vereinigt zu m,
m zerlegt in 3 und 4,
2 und 3 vereinigt zu m,,
m, zerlegt in 5 und 6,
10 = 6 vereinigt mit 6 zu 7.

Figur 73.

Die Kräfte in den übrigen Stangen sind:

$$9 = 5,$$
$$8 = 4,$$
$$13 = 3,$$
$$11 = 1,$$
$$12 = 2.$$



Figur 74.

Figur 75.

Figur 76. Allgemeines System.

Figur 77.

5 p zerlegt in 1 und 2,
1 und 3 vereinigt zu m,
m zerlegt in 3 und 4,
2 und 3 vereinigt zu m_1,
m_1 zerlegt in 5 und 6,
6 und 10 = 6 vereinigt zu 7.

8 = 4,
9 = 5,
11 = 3,
12 = 1,
13 = 2.

Das beliebige Fachwerk, Figur 76, sei mit den beliebigen Kräften 1·2·3 u. s. w., Figur 77, belastet. Man bilde das Kräftepolygon mit dem beliebigen Pole 0, Figur 77, und das Seilpolygon, Figur 76. Ziehe y y ∥ o c, so ist

A c = Auflagerdruck A, Figur 76,
B e = „ B, „

Den Kräfteplan bilde man ganz wie früher, Figur 72—75, nämlich:

A C zerlegt in I und II,
I und 1 vereinigt in m,
m zerlegt in III und IV,
II•III•2 vereinigt zu m_1,
m_1 zerlegt in V und VI,
IV•VI•3 vereinigt zu m_2,
m_2 zerlegt in VII und VIII,
V•VII•4 vereinigt zu m_3,
m_3 zerlegt in IX und X
u. s. w.

Auf die angeführte Weise lassen sich die Kräfte, die an den Konstruktionstheilen von Fachwerken jeder beliebigen Form wirken, bestimmen, wenn die *Laststellung* gegeben ist.

Sobald das Fachwerksystem einfacher, gewisse Dimensionen und Kräfte konstant sind, vereinfacht sich der Kräfteplan erheblich.

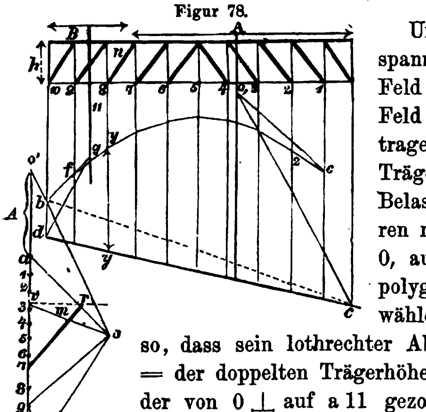
Die in Figur 76 und 77 gegebene Konstruktion verlangt bei Brückenträgern für jede Laststellung ein besonderes Kräftepolygon; sobald indessen das Fachwerksystem einfacher wird, lassen sich alle Polygone der für die einzelnen Glieder ungünstigsten Laststellung in einer einzigen Figur vereinigen.

Bei solchen Trägern, welche keine mobile Belastung zu tragen haben, kann man die Verzeichnung des Seilpolygons unterlassen, da die Auflagerdrucke sich oftmals leichter durch Rechnung finden lassen. Der Kräfteplan kann dann sofort entworfen werden. Namentlich ist dieses bei gleichmässig vertheilter Belastung sehr leicht auszuführen.

Ein Beispiel für Träger mit mobiler Belastung liefert Figur 78. Es ist hier angenommen, dass für das n^{te} Feld die Spannungen in den Stangen bei *der ungünstigsten Laststellung* ermittelt werden sollen. Die Spannung in den Streben erreicht ihr Maximum, wenn eine Seite des

Trägers von der zu unterführenden Stelle ab belastet, die andere aber frei ist. Die Spannung in den Gurtungen erreicht ihr Maximum, wenn der ganze Träger belastet und bei der zu untersuchenden Stelle n, Figur 78, die schwersten Lasten konzentrirt sind.

Figur 78.



Figur 79.

Um die Maximalspannungen im n^{ten} Feld (in Figur 78, Feld 7—8) zu finden, trage man über den Träger die einseitige Belastung A und deren mittle Drucklinie 0, auf. Im Kräftepolygon Figur 79 wähle man den Pol o so, dass sein lothrechter Abstand von a 11 = der doppelten Trägerhöhe h ist und dass der von 0 ⊥ auf a 11 gezogene Strahl die Linie a 9 halbirt. Sodann trage man von a bis 9 das Eigengewicht und von a bis 0, die Last A auf, ziehe:

c o′ Figur 78 ‖ o o, Figur 79,
o′ e „ ‖ o a „
e 2 „ ‖ o 1 „
u. s. w.,

wodurch der Seilpolygonzug c o, e 2 y f b entsteht.

Zieht man m Figur 79 ‖ b c Figur 78,
v r „ ‖ 8 7 „
7 r „ ‖ der Diagonalstrebe 8,

so ist: 7 r = der Maximal-Spannung in der Diagonalstrebe 8·7,

v 7 = der Maximal-Spannung in der
Vertikalstrebe 8.

Um die Maximal-Spannung in den Gurtungen zu finden, belaste man das freie Trägerende durch B (Figur 78) und ziehe die mittle Drucklinie 11, sodann mache man:

d g Figur 78 ‖ o 11 Figur 79,

wodurch der Seilpolygonzug c o, e 2 y f g d entsteht.

Zieht man d c, so ist:

y y auf 8 die **halbe** Spannung im Obergurt 7 • 8
und im Untergurt 8 • 9.

Führt man diese für Feld n gezeigten Konstruktionen an den übrigen Feldern aus, so erhält man die Maximal-Spannungen in sämmtlichen Stangen des Trägers.

Figur 80.

Figur 81. Kräftepolygon.

Ist derselbe Träger wie in Figur 80 gleichmässig belastet, so bilde man das Kräftepolygon (Figur 81) mit der Poldistanz = 2 h, ziehe die Polstrahlen und bilde das Seilpolygon.

Zieht man im Kräftepolygon (Figur 81) die Parallelen

zu den Diagonalstreben, so geben diese den Druck in denselben an und es ist

9 10 der Druck in Diagonale 9 10,
8 9 „ „ „ „ 8 9
u. s. w.
a, 10 der Druck in der Diagonale 0 1,
1 9 „ „ „ „ „ 1 2
u. s. w.

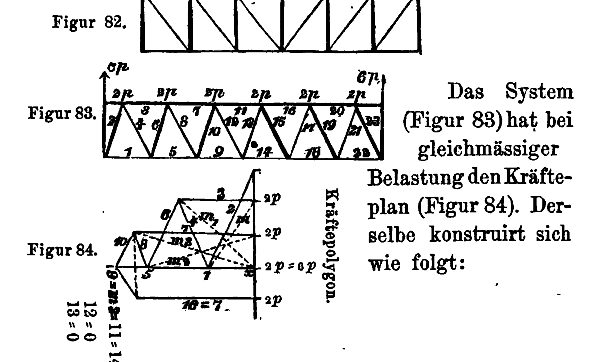
Zugleich geben die Längen x 5, x 6 u. s. w. die Zugspannung in den Hängestangen an und es ist

x 5 = die Spannung in Hängestange 6 Figur 80,
x 6 = „ „ „ „ 7 „
x 7 = „ „ „ „ 8 „

Die Ordinaten b c d e f u. s. w. im Seilpolygon endlich geben die Spannungen in den Gurtungen an und es ist

b = der halben Spannung 8 9 im Ober- und 9 10 im Untergurte,
c = „ „ „ 7 8 „ „ „ 8 9 „ „
d = „ „ „ 6 7 „ „ „ 7 8 „ „
u. s. w.

In ganz ähnlicher Weise wird das System (Figur 82) behandelt.



Figur 82.

Figur 83.

Figur 84.

Das System (Figur 83) hat bei gleichmässiger Belastung den Kräfteplan (Figur 84). Derselbe konstruirt sich wie folgt:

6 p zerlegt in x 1 = 1 und 2,
2 und 2 p verbunden zu m,
m zerlegt in 3 und 4,
1 und 4 verbunden zu m_1,
m_1 zerlegt in x 5 = 5 und 6,
3 6 und 2 p verbunden zu m_2,
m_2 zerlegt in 7 und 8,
5 und 8 verbunden zu m_3,
m_3 zerlegt in x 9 = 9 und 10,
7·10·2 p verbunden zu m_3 = 9 = 11 = 14,
da 13 und 14 = Null wird.

Zerlegt man m_3 in 2 p·15·16, so ergibt sich
15 = 10,
16 = 7.

Fährt man in der Konstruktion fort, so ergibt sich noch
17 = 8,
18 = 5,
19 = 6,
20 = 3,
21 = 4,
22 = 1,
23 = 2.

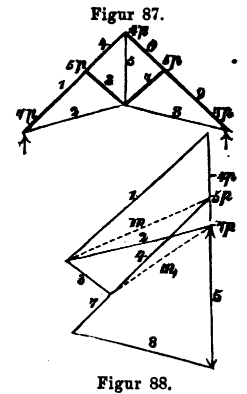
Figur 85.

Figur 86.

Für das Dachstuhlsystem (Figur 85) bildet sich der Kräfteplan (Figur 86) wie folgt:

p (Figur 86) zerlegt in 1 und 2,
1 und 2 p verbunden zu m;
m zerlegt in 3 und 4,
2 und 3 verbunden zu 5.

Figur 87.



Figur 88.

Das Dachbindersystem (Figur 87) hat den Kräfteplan (Figur 88).

Derselbe bildet sich wie folgt:

7 p zerlegt in 1 und 2,
1 und 5 p verbunden zu m,
m zerlegt in 3 und 4,
2 und 3 vereinigt zu m,,
m, zerlegt in 7•8•5,

wobei 7 = 3 und ∥ 7 Figur 87 zu machen ist.

Alsdann ist ferner:

6 = 4,
9 = 1.

Figur 89.

Figur 90.

Der Kräfteplan (Figur 90) zum Dachbindersystem (Figur 89) entwickelt sich wie folgt:

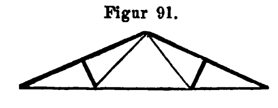
3 p zerlegt in 1 und 2,
1 und 2 verbunden zu m,
m zerlegt in 3 und 4,
2 und 3 verbunden zu m,,
m, zerlegt in 5 und 6.

Alsdann ist ferner:

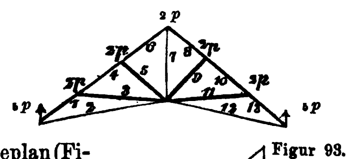
7 = 5,
8 = 4,
9 = 3,
11 = 1,
10 = 2.

Ganz ähnlich ist das System (Figur 91) zu behandeln.

Figur 91.



Figur 92.



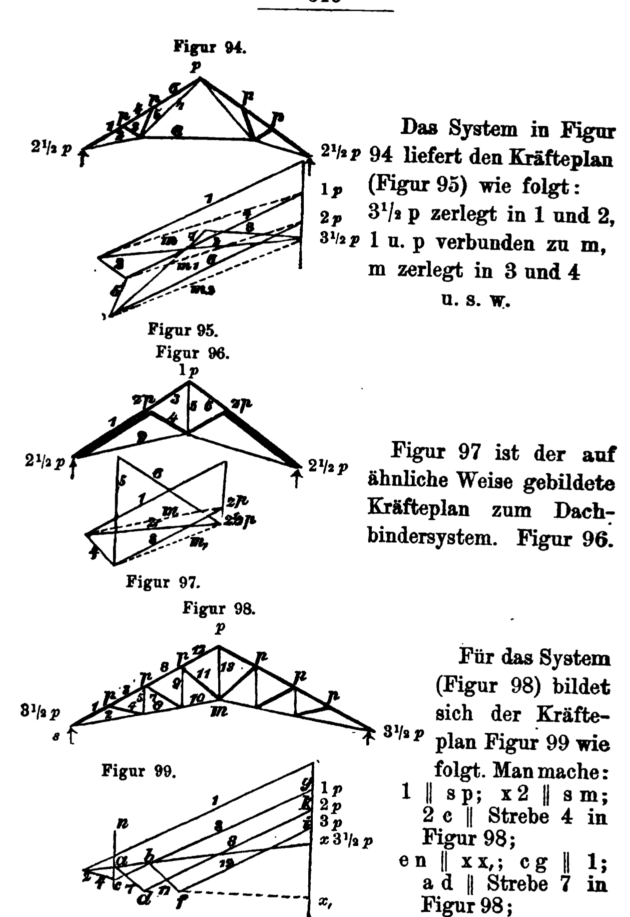
Figur 93.

Der Kräfteplan (Figur 93) zum Dachbindersystem (Figur 92) bildet sich wie folgt:
5 p zerlegt in 1 und 2,
1 u. 2 verbunden zu m,
m zerlegt in 3 u. 4,
4 u. 2 p verbunden zu m,,
m, zerlegt in 5 u. 6,
8 = 6 verbunden zu 7.



Alsdann ist:

$$9 = 5,$$
$$10 = 4,$$
$$11 = 3,$$
$$12 = 2,$$
$$13 = 1.$$



Figur 94.

Figur 95.

Figur 96.

Figur 97.

Figur 98.

Figur 99.

Das System in Figur 94 liefert den Kräfteplan (Figur 95) wie folgt: 3½ p zerlegt in 1 und 2, 1 u. p verbunden zu m, m zerlegt in 3 und 4 u. s. w.

Figur 97 ist der auf ähnliche Weise gebildete Kräfteplan zum Dachbindersystem. Figur 96.

Für das System (Figur 98) bildet sich der Kräfteplan Figur 99 wie folgt. Man mache: 1 ‖ s p; x 2 ‖ s m; 2 c ‖ Strebe 4 in Figur 98; e n ‖ x x,; c g ‖ 1; a d ‖ Strebe 7 in Figur 98;

b d ‖ x x,; d k ‖ 1; b f ‖ Strebe 11 in Figur 98;
f i ‖ 1; f x, ⊥ x x,, so ist:

in den Parallelen 1•3•8•12 die Spannung in den Sparrenstücken 1•3•8•12 (Figur 98) ermittelt. Ferner geben die Linien 2 c, a d, b f die Spannung in den Streben 4, 7, 11, die Vertikalen a c, b d und x x, die Spannung in den Hängeeisen 4, 9, 13 (Figur 98) an. Endlich ist:

x 2 = der Spannung in 2, Figur 98,
x a = „ „ „ 6, „
x b = „ „ „ 10, „

Figur 100.

Um zu dem System (Figur 100) den Kraftplan zu bilden mache man 1 ‖ dem Sparren, x 2 ‖ 2 Figur 100, 2 a ‖ 3 Figur 100, a b ‖ 1 Figur 191, a c ‖ 6 Figur 100,

Figur 101.

c d ⊥ a b und = der doppelten Projektion von a c × p. Ferner d f ‖ 8; f x ‖ Figur 100; g d ‖ 10 Figur 100 und = a c Figur 101; g h ‖ 2 a Figur 101 und bis zum Schnittpunkt mit der Verlängerung von d f. Endlich ziehe man g k und h l ‖ Figur 101, so geben die Parallelen 2 o;

a b; g k; h l; die Spannungen in den Sparrenstücken 1; 4; 13; 14; und die Normalen 2 a; c d; g h die Spannungen in den Streben 3, 7, 12 Figur 100 an. Ferner ist

2 x	Figur 101	=	der	Spannung	in	2	Figur 100,
c x	„	=	„	„	„	5	„
f x	„	=	„	„	„	9	„
d f	„	=	„	„	„	8	„
h f	„	=	„	„	„	11	„

Emil Stephan, Plagwitz-Leipzig.

Druckfehler.

Seite 222 Zeile 12 lies statt

$$\frac{b}{\cos.\beta}\;;\;\frac{a}{\cos.\beta}.$$

Seite 227 Zeile 4 lies statt

$$(\alpha+\beta)^0\;;\;(\alpha+\gamma)^0.$$

Seite 234 Zeile 9 lies statt

$$\frac{2\sin.\,{}^1/_2\,\beta\,(a\,c)}{a-c}\;;\;\frac{2\sin.\,{}^1/_2\,\beta\sqrt{a\,c}}{a-c}.$$

Seite 236 Zeile 9 lies statt

$$\frac{2\sin.\,{}^1/_2\,\alpha\,(b\,c)}{(c-b)}\;;\;\frac{2\sin.\,{}^1/_2\,\alpha\sqrt{b\,c}}{(c-b)}.$$